Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

Praktikum ....1...

Úloha č. 21

Název: Gravitační zrychlení

Pracoval: Jiří Kratochvíl stud.sk.: 15 dne: 26.3.2010

Odevzdal dne: ....

po opravě: 11.5.2010

	možný počet bodů	udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	5
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 20	20

Posuzoval:.................................... **dne:** 13/5/10

1. Pracovní úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
2. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla
3. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

2. Teoretická část

V této úloze budeme měřit gravitační zrychlení pomocí matematického a fyzického kyvadla. Pro výpočet periody fyzického kyvadla můžeme použít přibližný vztah:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \quad (1)$$

T *- doba kmitu,* ***I*** *- moment setrvačnosti,* ***m*** *- hmotnost kyvadla,*
d *- vzdálenost těžiště od osy otáčení,* ***α*** *- je maximální úhlová výchylka*

2.1 Matematické kyvadlo

Pokud aproximujeme fyzické kyvadlo, které je složeno z lehkého, pevného závěsu a těžkého kulového závaží, hmotným bodem a nehmotným, pevným závěsem, mluvíme o matematickém kyvadlu. Omezíme-li se na malé výchylky, platí pro periodu matematického kyvadla vztah:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l_M}{g}} \quad (2)$$

*T_M - perioda matematického kyvadla, l_M - délka matematického kyvadla, **g** - místní tíhové zrychlení*

2.2 Reverzní kyvadlo

Metoda reverzního kyvadla využívá faktu, že existují dvě osy otáčení fyzického kyvadla, které nejsou symetrické vzhledem k těžišti, kolem kterých kývá kyvadlo se stejnou periodou. Tyto osy jsou od sebe vzdáleny o redukovanou délku fyzického kyvadla l_r. Když budeme kývat kolem jedné z těchto os, můžeme využít vztahu

$$T_r = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}. \quad (3)$$

T_r - perioda, l_r - redukovaná délka kyvadla

2.3 Výpočet chyby idealizace matematickým kyvadlem

Tuto chybu určíme ze vztahu pro fyzické kyvadlo (1), kde potřebujeme vyjádřit moment setrvačnosti. Závaží aproximujeme jako homogenní kouli vztahem:

$$I_{k0} = \frac{2}{5} m_k r_k^2 \quad (4)$$

I_{k0} - moment setrvačnosti koule, r_k - poloměr koule, m_k - hmotnost koule

Závěs aproximujeme homogennní tyčí, pro kterou platí vztah:

$$I_{t0} = \frac{1}{12} m_t l_t^2 \quad (5)$$

I_{t0} - moment setrvačnosti tyče, m_t - hmotnost tyče, l_t - délka tyče [1]

Háček aproximujeme jako homogennní válec vztahem:

$$I_{v0}=\frac{1}{4}m_v(r_v^2+\frac{1}{3}l_v^2) \quad (6)$$

I_{v0} *- moment setrvačnosti válce,* ***m_v*** *- hmotnost válce,* ***r_v*** *- poloměr válce,* ***l_v*** *- délka válce* [2]

Tyto momenty setrvačnosti sečteme dle Steinerovy věty, a to vztahem

$$I=I_0+M\,a^2 \quad (7)$$

I *- moment setrvačnosti vůči ose otáčení,*
I_0 *- moment setrvačnosti tělesa vůči ose procházející těžištěm rovnoběžnou s osou otáčení,*
M *- hmotnost tělesa,* ***a*** *- vzdálenost těžiště tělesa a osy otáčení* [1]

3. Výsledky měření

3.1 Podmínky měření

Místo měření: Praha

3.2 Pomůcky

Stojan, provázek, koule s háčkem, fyzické kyvadlo s nastavitelnou pozicí těžiště pomocí posuvné čočky, posuvné měřidlo, digitální stopky se senzorem pohybu, metr.

3.3 Statistické zpracování

Chyby nepřímého měření sčítány metodou přenosu chyb dle vzorce

$$\sigma=\sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\sigma_i)^2} \quad (8)$$

σ *- výsledná chyba měření,* ***f*** *- fyzikální vztah,* ***x_i*** *- jednotlivé veličiny ze vztahu f,*
σ_i *- chyby jednotlivých veličin ze vztahu f*

Chyba statistická a chyba měřidla sečtena vzorcem

$$\sigma=\sqrt{(\sigma_m^2+\sigma_s^2)} \quad (9)$$

σ *- výsledná chyba měření,* ***σ_m*** *- chyba měřidla,* ***σ_s*** *- statistická chyba*

Chyba aritmetického průměru počítána dle vztahu

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_i (x_i-x)^2}{n^2}} \quad (10)$$

σ *- výsledná chyba měření,* ***x_i*** *- hodnota jednotlivých měření,* ***x*** *-průměrná hodnota,*
n *- počet měření*
[3]

3.4 Měření metodou matematického kyvadla

?+ kad. rozšíř. l_t

Matematické kyvadlo jsme vytvořili připevněním kovové koule s háčkem na stojan provázkem o délce $\boldsymbol{l_p = (9{,}96 \pm 0{,}02).10^2\ mm}$ tak, aby dráha koule při kmitání procházela přes senzor pohybu u digitálních stopek. Poloměr koule byl $\boldsymbol{r_k = (1{,}17 \pm 0{,}01).10\ mm}$. Háček, který jsme aproximovali válcem, měl poloměr $\boldsymbol{r_v = (1{,}3 \pm 0{,}5)\ mm}$ a délku $\boldsymbol{l_v = (9 \pm 1)\ mm}$. Hmotnost koule s háčkem byla $\boldsymbol{m_k + m_v = (5{,}5453 \pm 0{,}0001).10\,g}$. Celková délka matematického kyvadla byla $\boldsymbol{l_M = (1{,}017 \pm 0{,}002).10^3\ mm}$. Naměřené hodnoty času $\boldsymbol{t}$ pro $\boldsymbol{n}$ kmitů (měřili jsme po deseti kmitech, abychom zvýšili přesnost měření periody o jeden řád) a vypočítané periody $\boldsymbol{T_M}$ jsou zapsány v ***Tabulce č.1***.

Tabulka č.1:.Matematické kyvadlo

n *- počet kmitů,* ***t*** *- naměřený čas,*
$\boldsymbol{T_M}$ *- perioda matematicko kyvadla*

	n	t [s]	T_M [s]
1	10	20,2107	2,02107
2	10	20,2106	2,02106
3	10	20,2145	2,02145
4	10	20,2154	2,02154
5	10	20,2085	2,02085
6	10	20,2167	2,02167
7	10	20,2126	2,02126
8	10	20,2138	2,02138
9	10	20,2137	2,02137
10	10	20,2122	2,02122

chyba měření času stopkami - **σ(t) = 0,0001 s**
chyba vypočítané periody při 10 kmitech - **σ(** $\boldsymbol{T_M}$**) = 0,00001 s**

Průměrná hodnota periody je $\boldsymbol{\overline{T}_M = (2{,}02129 \pm 0{,}00001)\ s}$. Dosazením periody $\boldsymbol{\overline{T}_M}$ a délky kyvadla $\boldsymbol{l_M}$ do vztahu (2) vypočítáme gravitační zrychlení

$$\boldsymbol{g = (9{,}83 \pm 0{,}02) m.s^{-1}}$$

3.5 Výpočet chyby metody matematického kyvadla

Výpočet chyby provedeme tak, že spočítáme gravitační zrychlení dle vzorce (1). Abychom to mohli udělat, musíme si vyjádřit moment setrvačnosti kyvadla vůči ose otáčení kyvadla a vzdálenost těžiště od této osy otáčení.

Moment setrvačnosti provázku vůči ose procházející jeho středem $\boldsymbol{I_{t0}}$ spočítáme jako moment setrvačnosti homogenní tyče, dle vztahu (5). Poté na něj aplikujeme Steinerovu větu (7) se vzdáleností os $\boldsymbol{a = (0{,}498 \pm 0{,}002)m}$, což je polovina délky provázku a tím spočítáme moment setrvačnosti provázku vůči ose otáčení je $\boldsymbol{I_t = (0{,}0505 \pm 0{,}003)\ g.m^2}$.

Moment setrvačnosti koule a háčku spočítáme následujícím způsobem. Rozdělíme jejich celkovou hmotnost $\boldsymbol{m_k + m_v = (5{,}5453 \pm 0{,}0001).10\,g}$ v poměru jejich objemů $\boldsymbol{m_k = (5{,}51 \pm 0{,}15).10\,g}$ a $\boldsymbol{m_v = (3{,}6 \pm 3{,}4).10^{-1}\ g}$ a poté spočítáme jejich momenty setrvačnosti. Moment setrvačnosti koule pro osu procházející jejím středem $\boldsymbol{I_{k0}}$ vypočítáme dle vztahu (4) a poté na něj aplikujeme Steinerovu větu (7) se vzdáleností os $\boldsymbol{a = (1{,}017 \pm 0{,}002)\ m}$, takže $\boldsymbol{I_k = (5{,}69 \pm 0{,}15).10\,g.m^2}$. Moment setrvačnosti háčku spočítáme jako moment setrvačnosti válce vůči ose procházející podstavami I_{v0} dle vztahu (6) a poté na něj aplikujeme Steinerovu větu (7) se vzdáleností os **a** = ***(1,0008 ± 0,0002)*** **m**, takže I_v = ***(3,6 ± 3,4).10⁻¹ g.m²***.

Celkový moment setrvačnosti našeho matematického kyvadla je ***I = (5,7396 ± 0,19).10 g.m²***. Vzdálenost těžiště spočítáme pomocí porovnání momentů, vzdálenost těžiště od osy otáčení je ***d = (1,0155 ± 0,0020) m***. Dosazením momentu setrvačnosti ***I***, vzdálenosti ***d*** a periody $\bar{T}_M$ = ***(2,02129*** **± 0,00001) s** do vztahu (1) spočítáme gravitační zrychlení a zaokrouhlíme ho v rámci chyby z předchozího měření tak, aby byl řád chyby stejný. Takto spočítané gravitační zrychlení je rovno ***g = (9,83 ± 0,11) kg.m⁻²***. Odečteme od sebe toto gravitační zrychlení a gravitační zrychlení vypočítané aproximací matematického kyvadla a získáme chybu měření metodou matematického kyvadla.

$$\sigma_g = 0{,}00\ \mathrm{kg.m^{-2}}$$

3.6 Měření metodou fyzického kyvadla

Jako fyzické kyvadlo jsme použili tyč s dvěma pevnými břity, které sloužily jako osy otáčení. Kyvadlo jsme mohli nechat kývat kolem jednoho či druhého břitu. Tyč měla na jednom konci závit, na nějž se dala namontovat kovová čočka, změnou polohy čočky jsme mohli měnit těžiště kyvadla. Vzdálenost dvou břitů byla l_r = ***(9,93 ± 0,02).10² mm***. Polohou čočky jsme mohli docílit, aby kyvadlo kmitalo se stejnou periodou kolem obou břitů, potom je tato délka l_r rovna redukované délce kyvadla.

Tuto polohu čočky jsme získali grafickou interpolací pro extrémní polohy čočky. Když jsme nastavili čočku co nejdál od těžiště tyče, naměřili jsme vzdálenost od referenčního bodu l_{max} = ***73,21mm***, při kmitání okolo břitu s čočkou pod těžištěm jsme naměřili periodu T_{Dmax} = ***22,1306 s***, při kmitání okolo břitu s čočkou nad těžištěm jsme naměřili periodu T_{Nmax} = ***22,5938 s***. Když jsme nastavili čočku co nejblíž k těžišti tyče, naměřili jsme vzdálenost od referenčního bodu l_{min} = ***23,85 mm*** a periody s čočkou pod těžištěm T_{Dmin} = ***21,7058 s***, s čočkou nad těžištěm T_{Nnin} = ***20,2101 s***. Tato teoretická vzdálenost od referenčního bodu vyšla l_x= ***61,53m***. Poté jsme ručně nakalibrovali čočku do vzdálenosti od ref. bodu na l_{ref}= ***63,48mm.***

S takto nastaveným kyvadlem můžeme vypočítat gravitační zrychlení dle vztahu (3). Naměřené hodnoty ***t*** - časů, pro ***n*** - kmitů a z nich vypočítané periody T_f jsou zapsány v následujících tabulkách. V **Tabulce č.2** jsou uvedeny hodnoty pro kývání kolem břitu, když byla čočka pod těžištěm kyvadla, a v **Tabulce č.3**, když byla čočka nad těžištěm.

Tabulka č.2:.Fyzické kyvadlo - čočka nad těžištěm

***n** - počet kmitů, **t** - naměřený čas,*
***T_f** - perioda fyzického kyvadla*

	n	t [s]	T_f [s]
1	10	20,0439	2,00439
2	10	20,0404	2,00404
3	10	20,0432	2,00432
4	10	20,0416	2,00416
5	10	20,0446	2,00446
6	10	20,0410	2,00410
7	10	20,0398	2,00398
8	10	20,0480	2,00480
9	10	20,0420	2,00420
10	10	20,0446	2,00446

chyba měření času stopkami - **σ(t) = 0,0001 s**
chyba vypočítané periody - **σ(T_f) = 0,00001 s**

Tabulka č.3:.Fyzické kyvadlo - čočka pod těžištěm

***n** - počet kmitů, **t** - naměřený čas,*
***T_f** - perioda fyzického kyvadla*

	n	t [s]	T_f [s]
1	10	20,0424	2,00424
2	10	20,0404	2,00404
3	10	20,0405	2,00405
4	10	20,0401	2,00401
5	10	20,0419	2,00419
6	10	20,0393	2,00393
7	10	20,0418	2,00418
8	10	20,0412	2,00412
9	10	20,0407	2,00407
10	10	20,0432	2,00432

chyba měření času stopkami - **σ(t) = 0,0001 s**
chyba vypočítané periody - **σ(T_f) = 0,00001 s**

Průměrná hodnota periody je $\overline{T_f}$ = ***(2,00420*** **± 0,00005) s**. Dosazením periody $\overline{T_f}$ a délky kyvadla ***l***, do vztahu (3) vypočítáme gravitační zrychlení

$$g = (9,76 \pm 0,02) m.s^{-1}$$

4. Diskuse

Výsledné hodnoty vyšly dle našeho očekávání. Měření metodou fyzického kyvadla je zatíženo systematickou chybou 0,05m.s^{-2} při srovnání s tabelovanou hodnotou 9,81m.s^{-2} [2], což je způsobeno nejspíše tlumením, které způsobují dynamické třecí síly v oblasti nedostatečně ostrých břitů, statické třecí síly také v oblasti břitů při maximální amplitudě a odpor vzduchu.

Měření metodou matematického kyvadla nám vyšlo ve shodě v rámci odchylky s tabelovanou hodnotou $9.81 m.s^{-2}$ [2]. Systematická chyba tohoto měření je pouze $0{,}02 m.s^{-2}$, tato odchylka je způsobena nepřesným měřením délky kyvadla.

Chyba aproximace kyvadla nám vyšla nulová, to znamená aproximace matematického kyvadla vztahem (2) je velice přesná. Gravitační zrychlení počítáno dle vztahu (1) nám vyšlo $g = (9{,}83 \pm 0{,}11)$ kg.m^{-2}. Toto gravitační zrychlení je shodné s gravitačním zrychlením počítaným dle vztahu (2) akorát s větší chybou, tak velká chyba je způsobena asymetričností kuličky (díky poloměru ve třetí mocnině) a měřením délky závěsu (kvůli druhé mocnině). Vliv háčku je téměř zanedbatelný. Vliv výchylky na výsledné gravitační zrychlení je zhruba při čtyřech stupních $+ 0{,}01$ kg.m^{-2}.

5. Závěr

4

1. Změřili jsme místní tíhové zrychlení metodou fyzického kyvadla $\boldsymbol{g = (9{,}76 \pm 0{,}02)\ m.s^{-2}}$.
2. Změřili jsme místní tíhové zrychlení metodou matematického kyvadla $\boldsymbol{g = (9{,}82 \pm 0{,}02)\ m.s^{-2}}$.
3. Spočetli jsme chybu, kterou zapříčinila idealizace reálného kyvadla v rámci modelu matematického kyvadla $\boldsymbol{\sigma_g = 0{,}00\ m.s}$-2.

6. Seznam použité literatury

[1] *http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp,* **Studijní texty Praktika I**, mff uk

[2] *J.Mikulčák a kol.*, **Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce**, Prometheus, Praha, 2003

[3] *Brož, J. a kol.*, **Základy fyzikálních měření I**, SPN, Praha 1983

4 jednotky se nepíší italic

používejte jednotné desetinné oddělovače v Čechách nejlépe čárky