

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

Praktikum ....1...

Úloha č. 9

Název: Měření modulu pružnosti v tahu

Pracoval: Jiří Kratochvíl

stud.sk.: 15

dne: 1.4.2010

Odevzdal dne: .....

**Pracovní úkol:**

1. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete užitím lineární regrese.

	možný počet bodů	udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	5
Teoretická část	0 - 1	0
Výsledky měření	0 - 8	6
Diskuse výsledků	0 - 4	4
Závěr	0 - 1	1
Seznam použité literatury	0 - 1	1
<b>Celkem</b>	max. 20	14

Posuzoval: *Ševčík*

dne: *29.4.*

*Referát je poměrně uspokojivý, musel by  
bezděkovat co a jak je užit, jak byly zpracovány  
výsledky měření.*

Napadlo mě, jak to bude? jak to bude? jak to bude?

### Teorie

$$(1) \Delta l = \frac{l_0 F}{E S} \quad (2) \sigma = \frac{F}{S} \quad (3) \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4) E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{l_0 F}{\Delta l S} \quad (5) r \Delta \alpha = \Delta l \quad (6) \operatorname{tg}(2 \Delta \alpha) = \frac{n - n_0}{L}$$
$$(7) \Delta \alpha = \frac{n - n_0}{2L} \quad (8) y = \frac{F l^3}{48 E I_p} \quad (9) I_p = \frac{a b^3}{12} \quad (10) E = \frac{F l^3}{4 y a b^3} \quad (11) S = \pi R^2$$

$\Delta l$  - prodloužení drátu,  $l_0$  - počáteční délka drátu,  $F$  - síla působící na drát,  $E$  - modul pružnosti v tahu,  $S$  - průřez drátu,  $\sigma$  - napětí,  $\epsilon$  - relativní prodloužení,  $r$  - poloměr kladky,  $\Delta \alpha$  - změna úhlu zrcátka,  $n$  - hodnota na stupnici při prodloužení  $l_0 + \Delta l$ ,  $n_0$  - hodnota na stupnici při prodloužení  $l_0$ ,

$L$  - vzdálenost zrcátka a stupnice,  $y$  - průhyb,  $l$  - vzdálenost břitů,  $I_p$  - plošný moment setrvačnosti,

$a$  - šířka trámku,  $b$  - tloušťka trámku,  $R$  - poloměr drátu

Závislost protažení drátu v oblasti pružné deformace je dána vztahem (1), závislost napětí na síle a průřezu vztahem (2), relativní protažení je dáno vztahem (3), ze vztahů (1) (2) (3) plyne vztah (4), výpočet protažení drátu z otočení kladky udává vztah (5), vztah (6) udává výpočet úhlu z aparatury dalekohled, zrcátko, stupnice, vztah (7) je aproximací vztahu (6) pro malé úhly, vztah (8) udává velikost prohnutí  $y$ , kde se plošný moment setrvačnosti spočítá dle vztahu (9), z (8) a (9) plyne (10), poloměr drátu se spočítá dle vztahu (11). [1]

### Pomůcky:

Pásové měřidlo, posuvné měřidlo, mikrometr, závažíčka, dalekohled se stupnicí, ocelový a mosazný trámek, drát.

### Aparatura:

1. Stojan s uchycením na drát, kladka opatřená zrcátkem, miska na závažíčka se závěsem na drát.

2. Stojan s dvěma břity, lampa, mikroskop, stupnice, která se připevní na trámky.

### Postup měření:

1. metoda protažení drátu: naskládáme všechna závaží na misku, tím získáme maximální možné protažení, nastavíme zrcátko do kolmé polohy ke stupnici, abychom snížili aproximaci úhlu. Poté nastavíme počáteční hmotnost, v našem případě 1kg, postupně přidáváme závaží a měříme protažení přes dalekohled se stupnicí, až dojdeme k maximálnímu zatížení, poté závažíčka odebíráme, abychom si ověřili, jestli maximální zatížení pružně zdeformovalo drát. Změříme vzdálenost zrcátka a stupnice, počáteční délku drátu pásovým měřidlem, poloměr drátu mikrometrem, poloměr kladky posuvným měřidlem.

2. metoda průhybu trámku: Nasadíme na trámek stupnici a postupně přidáváme závaží a měříme průhyb, poté je odebíráme a měříme průhyb. Změříme vzdálenost břitů pásovým měřidlem, rozměry trámku mikrometrem.

Všechny neměnné hodnoty změříme 3x.

### Výsledky

Statistické zpracování: Chyby počítány metodou přenosu chyb dle vzorce  $s = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\sigma_i)^2}$ , chyba

statistická a chyba měřidla sečtena ve čtverci. Lineární regrese v programu gnuplot, asymptotická chyba sečtena ve čtverci s chybou měření, kterou jsem získal váženým průměrem jednotlivých chyb měření s váhou odchylka závislé proměnné na druhou. Chyby jsou pravděpodobné, výsledná hodnota leží v intervalu  $\sigma$ , tj. s 68% pravděpodobností. Veličiny v tabulkách jsou počítány odpovídajícími vzorci v předchozím oddíle.

Písmenem  $s$  značím chybu měření, tato chyba se vztahuje k hodnotě předcházející

Tabulka č.1:  $m$  - hmotnost závaží,  $n_0$  - dílky na stupnici u dalekohledu přidávání závaží,  $n$  - dílky na stupnici u dalekohledu odebírání závaží,  $\Delta \alpha$  - změna úhlu,  $\Delta l$  - změna délky drátu,  $F$  - síla

Tabulka č.2:  $D$  - průměr drátu

Tabulka č.3:  $a_o$  - šířka ocelového trámku,  $b_o$  - výška ocelového trámku

Tabulka č.4:  $a_m$  - šířka mosazného trámku,  $b_m$  - výška mosazného trámku

Tabulka č.5:  $m$  - hmotnost závaží,  $y_{o+}$  - průhyb ocelového trámku přidávání závaží - stupnice,  $y_o$  - průhyb o.t. ubírání závaží - stupnice,  $F$  - síla,  $\Delta y$  - změna průhybu trámku

Tabulka č.6:  $m$  - hmotnost závaží,  $y_{m+}$  - průhyb mosazného trámku přidávání závaží - stupnice,  $y_m$  - průhyb m.t. ubírání závaží - stupnice,  $F$  - síla,  $\Delta y$  - změna průhybu trámku

Tabulka č.7, 8, 9, 10, 11, 12:  $k$  - koeficient lineární regrese,  $E$  - modul pružnosti.

Tabulka č.13: chyby měření jednotlivých veličin

Tabulka č.14: konstanty - neměnné hodnoty během měření

Tabulka č.1: měření modulu u pružnosti oceli metodou protažení drátu

	m[kg]	n <sub>1</sub> [cm]	n <sub>2</sub> [cm]	Δα[rad]	s[rad]	Δl[mm]	s[mm]	F[N]
1	0	21,3	21,25	0,0000	0,0004	0,000	0,008	0
2	0,1	21	21	0,0018	0,0004	0,035	0,008	0,98
3	0,2	20,75	20,75	0,0033	0,0004	0,064	0,008	1,96
4	0,3	20,5	20,5	0,0048	0,0004	0,093	0,008	2,94
5	0,4	20,2	20,2	0,0066	0,0004	0,128	0,008	3,92
6	0,5	19,95	20	0,0081	0,0004	0,157	0,008	4,91
7	0,6	19,7	19,7	0,0097	0,0004	0,186	0,009	5,89
8	0,7	19,45	19,4	0,0112	0,0004	0,215	0,009	6,87
9	0,8	19,2	19,2	0,0127	0,0004	0,244	0,009	7,85
10	0,9	18,95	18,9	0,0142	0,0004	0,273	0,009	8,83
11	1	18,7	18,65	0,0157	0,0004	0,302	0,009	9,81
12	1,1	18,4	18,4	0,0175	0,0004	0,337	0,009	10,79
13	1,2	18,15	18,2	0,0190	0,0004	0,366	0,010	11,77
14	1,3	17,95	17,9	0,0202	0,0004	0,389	0,010	12,75
15	1,4	17,65	17,65	0,0220	0,0004	0,424	0,010	13,73
16	1,5	17,4	17,4	0,0235	0,0004	0,453	0,010	14,72
17	1,6	17,15	17,15	0,0250	0,0004	0,482	0,010	15,7
18	1,7	16,9	16,9	0,0265	0,0004	0,511	0,011	16,68
19	1,8	16,65	16,65	0,0280	0,0004	0,540	0,011	17,66
20	1,9	16,4	16,4	0,0296	0,0004	0,569	0,011	18,64
21	2	16,15	16,15	0,0311	0,0004	0,598	0,011	19,62
22	2,1	15,9	15,9	0,0326	0,0004	0,627	0,012	20,6
23	2,2	15,65	15,7	0,0341	0,0004	0,656	0,012	21,58
24	2,3	15,45	15,45	0,0353	0,0004	0,679	0,012	22,56
25	2,4	15,2	15,2	0,0368	0,0004	0,708	0,012	23,54
26	2,5	14,95	14,95	0,0383	0,0004	0,737	0,013	24,53
27	2,6	14,7	14,7	0,0398	0,0004	0,766	0,013	25,51
28	2,7	14,45	14,45	0,0413	0,0004	0,795	0,013	26,49
29	2,8	14,2	14,2	0,0428	0,0004	0,824	0,014	27,47

Tabulka č.5: měření modulu pružnosti ocelového trámku-průhyb

	m[g]	y <sub>on</sub> [mm]	y <sub>o</sub> [mm]	F[N]	Δy[mm]	s[mm]
1	0	3,35	3,37	0	0	0,02
2	50	3,5	3,5	0,491	0,150	0,02
3	100	3,65	3,65	0,981	0,300	0,02
4	150	3,8	3,75	1,472	0,450	0,02
5	200	3,9	3,9	1,962	0,550	0,02
6	250	4	4	2,453	0,650	0,02
7	300	4,15	4,15	2,943	0,800	0,02
8	350	4,3	4,3	3,434	0,950	0,02
9	400	4,42	4,43	3,924	1,070	0,02
10	450	4,6	4,55	4,415	1,250	0,02
11	500	4,7	4,7	4,905	1,350	0,02
12	550	4,85	4,85	5,396	1,500	0,02
13	600	5	5	5,886	1,650	0,02
14	650	5,1	5,15	6,377	1,750	0,02
15	700	5,25	5,25	6,867	1,900	0,02
16	750	5,4	5,4	7,358	2,050	0,02
17	800	5,52	5,52	7,848	2,170	0,02
18	850	5,65	5,65	8,339	2,300	0,02
19	900	5,8	5,8	8,829	2,450	0,02
20	950	5,92	5,92	9,320	2,570	0,02
21	1000	6,08	6,08	9,810	2,730	0,02

Tabulka č.2: průměr drátu

	D[mm]	s[mm]
1	0,510	0,002
2	0,505	0,002
3	0,507	0,002
4	0,507	0,002
5	0,507	0,002
6	0,509	0,002
7	0,508	0,002
X	0,5076	0,0025

Tabulka č.4: rozměry mosazného trámku

	a <sub>m</sub> [mm]	s[mm]	b <sub>m</sub> [mm]	s[mm]
1	11,800	0,005	1,980	0,005
2	11,820	0,005	1,985	0,005
3	11,870	0,005	1,985	0,005
4	11,850	0,005	1,980	0,005
5	11,880	0,005	1,990	0,005
6	11,900	0,005	1,982	0,005
7	11,860	0,005	1,980	0,005
8	11,770	0,005	1,980	0,005
9	11,810	0,005	1,975	0,005
10	11,840	0,005	1,983	0,005
X	11,84	0,12	1,982	0,012

Tabulka č.3: rozměry ocelového trámku

	a <sub>o</sub> [mm]	s[mm]	b <sub>o</sub> [mm]	s[mm]
1	11,770	0,005	2,970	0,005
2	11,860	0,005	2,970	0,005
3	11,930	0,005	2,965	0,005
4	11,940	0,005	2,970	0,005
5	11,870	0,005	2,965	0,005
6	11,900	0,005	2,970	0,005
7	11,900	0,005	2,965	0,005
8	11,920	0,005	2,960	0,005
9	11,910	0,005	2,970	0,005
10	11,930	0,005	2,970	0,005
X	11,89	0,15	2,968	0,012

Tabulka č.6: měření modulu pružnosti mosazného trámku-průhyb

	m[g]	y <sub>on</sub> [mm]	y <sub>o</sub> [mm]	F[N]	Δy[mm]	s[mm]
1	0	4,6	4,6	0	0	0,02
2	20	4,95	4,95	0,196	0,350	0,02
3	40	5,3	5,3	0,392	0,700	0,02
4	60	5,7	5,7	0,589	1,100	0,02
5	80	6,1	6,05	0,785	1,500	0,02
6	100	6,5	6,4	0,981	1,900	0,02
7	120	6,8	6,75	1,177	2,200	0,02
8	140	7,15	7,15	1,373	2,550	0,02
9	160	7,5	7,5	1,570	2,900	0,02
10	180	7,85	7,85	1,766	3,250	0,02
11	200	8,2	8,2	1,962	3,600	0,02
12	220	8,6	8,6	2,158	4,000	0,02
13	240	8,9	8,95	2,354	4,300	0,02
14	260	9,25	9,3	2,551	4,650	0,02
15	280	9,65	9,65	2,747	5,050	0,02
16	300	10	10	2,943	5,400	0,02

Tabulka č. 7:

Lin.reg.drát

k[mm/N]	s[mm/N]
0,0299	0,0016

Tabulka č. 8: E

oceli drát

E[GPa]	s[GPa]
189	10

Tabulka č. 9:

Lin.reg.oc.trám.

k[mm/N]	s[mm/N]
0,276	0,007

Tabulka č. 10: E

oceli - trámek

E[GPa]	s[GPa]
204,2	6,7

Tabulka č. 11:

Lin.reg.mos.trám.

k[mm/N]	s[mm/N]
1,824	0,025

Tabulka č. 12: E

mosazi - trám.

E[GPa]	s
104,0	2,7

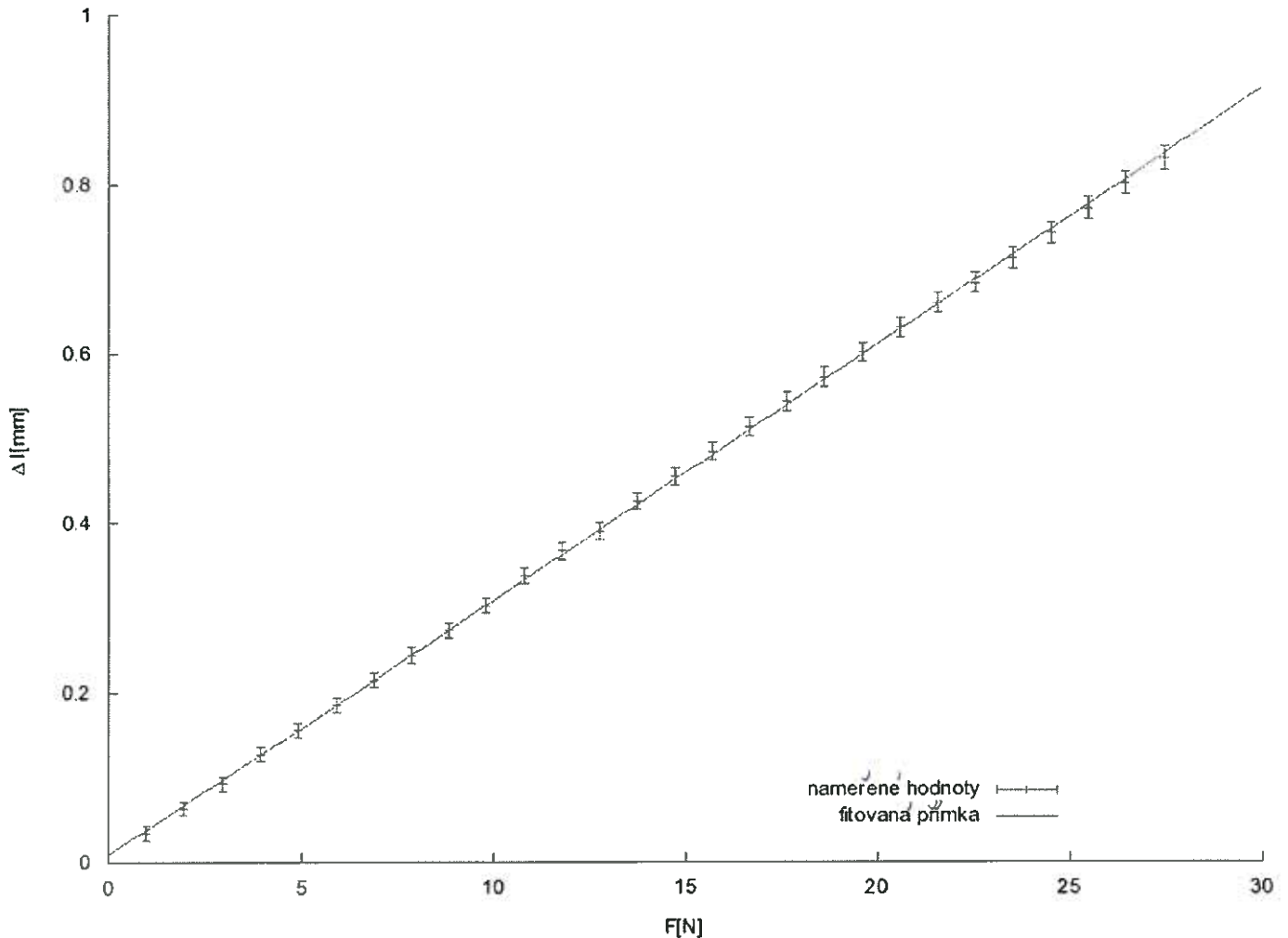
Tabulka č. 13: odchylky

velicina	s	
n [cm]	0,05	dílky na stupnici u dalekohledu
R[mm]	0,002	poloměr kladky
a[mm]	0,005	šířka trámku
b[mm]	0,005	výška trámku
γ[mm]	0,02	prohnutí trámku

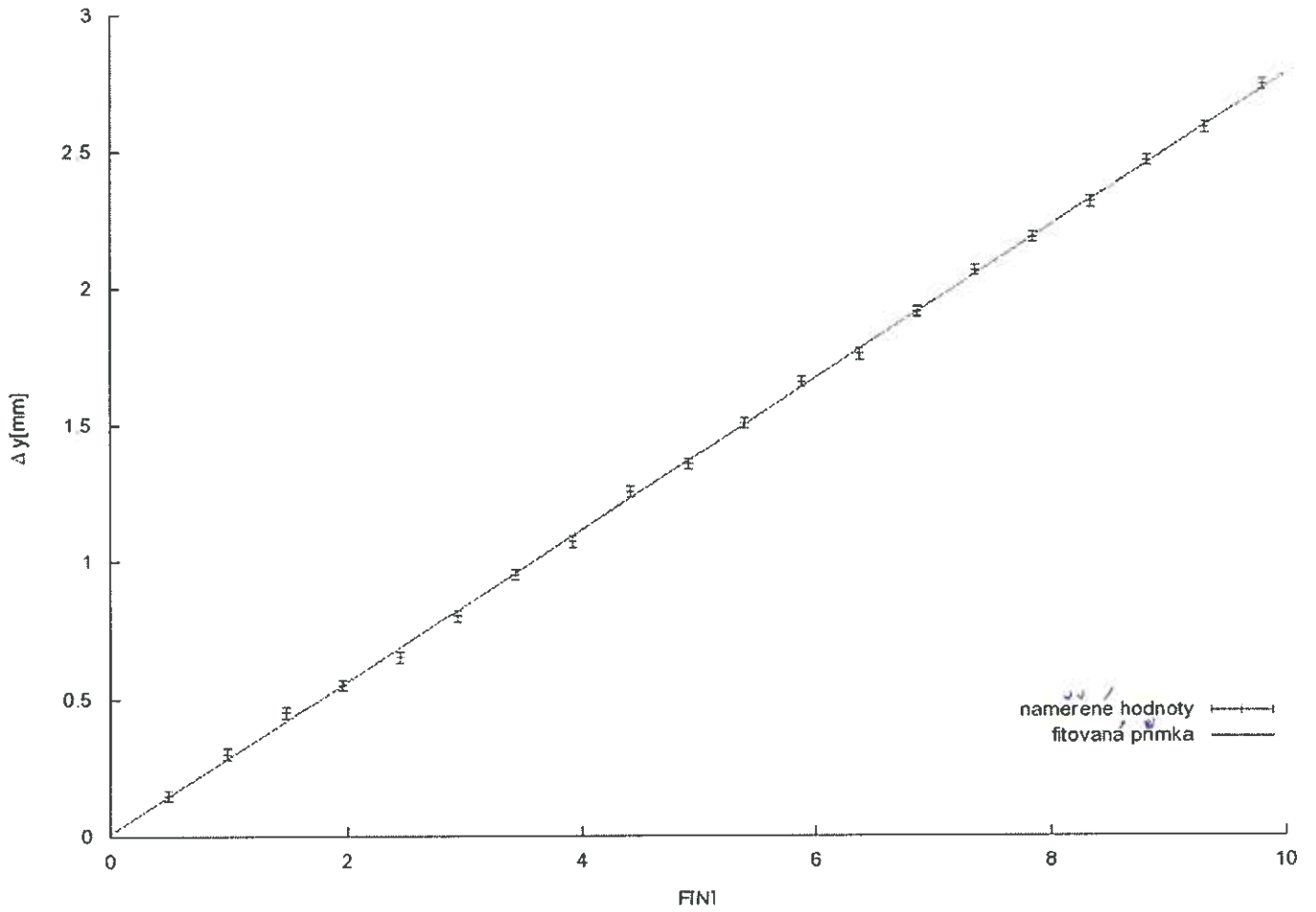
Tabulka č. 14: konstanty

	hodnota	s	
$l_0$ [cm]	114,1	0,2	počáteční délka drátu
L [cm]	82,9	0,2	vzdálenost stupnice
r [cm]	1,93	0,03	poloměr kladky
R [mm]	0,254	0,001	poloměr drátu
$a_0$ [mm]	11,9	0,2	šířka ocelového trámku
$b_0$ [mm]	2,97	0,01	výška ocelového trámku
$a_m$ [mm]	11,8	0,1	šířka mosazného trámku
$b_m$ [mm]	1,98	0,01	výška mosazného trámku
l [cm]	41,2	0,1	vzdálenost břitů
g [m.s <sup>-2</sup> ]	9,81	0,01	místní gravitační zrychlení

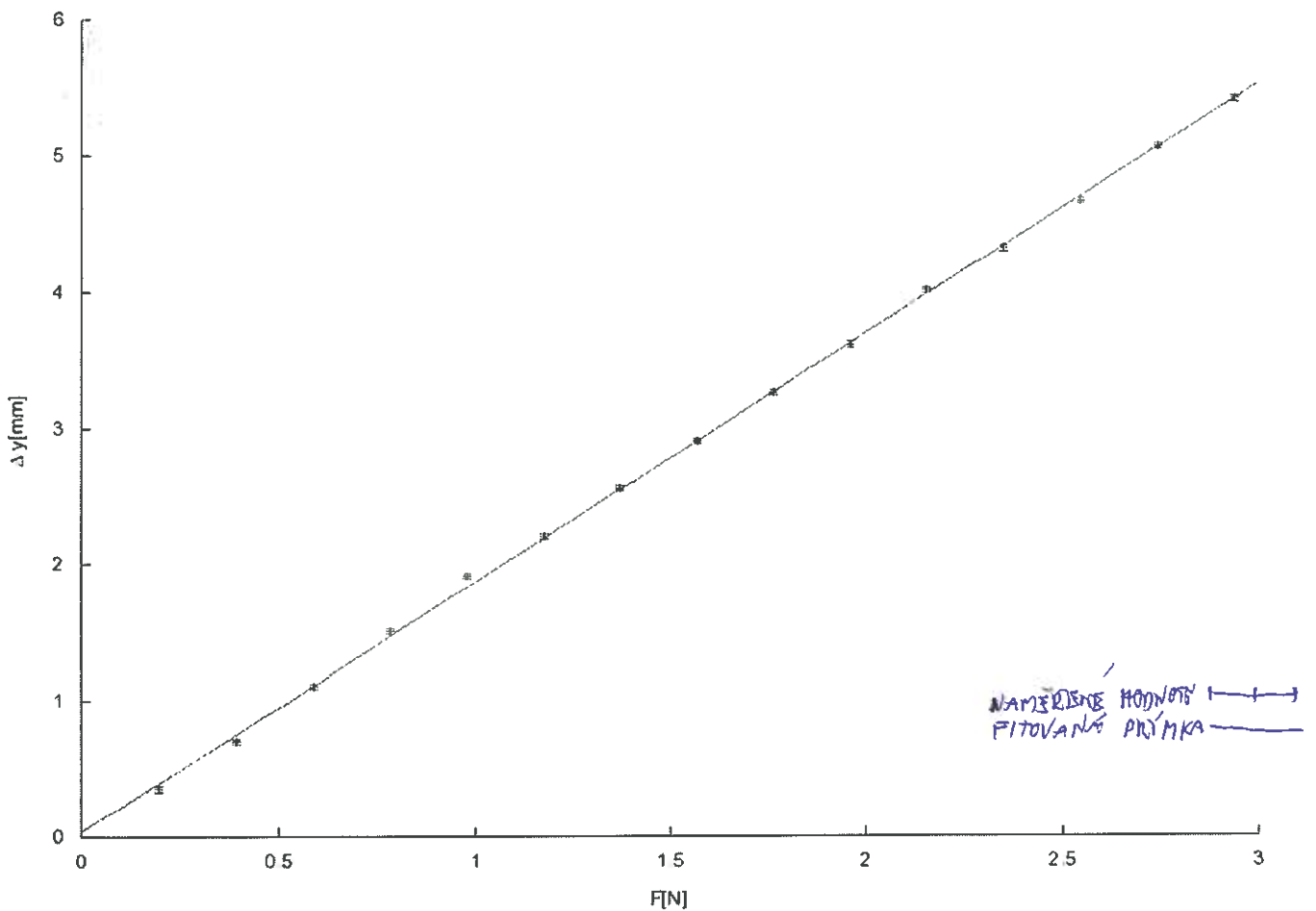
GRAF 1. Závislost protažení na síle



GRAF 2 Závislost pruhybu oceli na síle



GRAF 3 Závislost pruhybu mosazi na síle



Modul pružnosti oceli v tahu metodou protažení drátu  $E_{\text{oceli d}} = (1,89 \pm 0,10) \cdot 10^{11}$  Pa.

Modul pružnosti oceli v tahu metodou průhybu trámku  $E_{\text{oceli}} = (2,042 \pm 0,067) \cdot 10^{11}$  Pa

Modul pružnosti mosazi v tahu metodou průhybu trámku  $E_{\text{mosazi}} = (1,040 \pm 0,027) \cdot 10^{11}$  Pa

## Diskuse

### 1. Výsledky

Výsledné hodnoty se shodují s tabelovanými hodnotami, modul pružnosti oceli metodou protažení drátu  $E_{\text{oceli d}} = (1,89 \pm 0,10) \cdot 10^{11}$  Pa a modul pružnosti oceli metodou prohýbání trámku  $E_{\text{oceli}} = (2,042 \pm 0,067) \cdot 10^{11}$  Pa leží v intervalu od  $1,6 \cdot 10^{11}$  Pa do  $2,2 \cdot 10^{11}$  Pa což jsou tabelované hodnoty [2] pro ocel, modul pružnosti mosazi  $E_{\text{mosazi}} = (1,040 \pm 0,027) \cdot 10^{11}$  Pa leží v intervalu  $0,55 \cdot 10^{11}$  Pa až  $1,25 \cdot 10^{11}$  Pa [2], což jsou tabelované hodnoty pro slitiny mědi. Moduly pružnosti oceli v tahu změřené oběma metodami se v rámci odchylek téměř shodují, což značí, že drát i trámek byli vyrobeny z podobné oceli. Vzhledem k tomu, že nebylo možné zjistit přesné složení slitin, nemohl jsem určit systematickou chybu.

### 2. Chyby

Metoda protažení drátu: Očekával bych malou systematickou chybu v aproximace funkce tangens, tuto chybu jsem spočetl a chyba této aproximace neovlivní výsledek, neboť je o řád menší než výsledek. Největší chybu jsem zaznamenal u chyby stupnice u dalekohledu a chyby měření poloměru kladky. Dle těchto hodnot se počítá protažení drátu, které je menší než milimetr. Tzn. s největší chybou je změřeno protažení drátu, což jsem očekával. Tyto chyby by bohužel nešly eliminovat při dané aparatuře, neboť nevíme, v jakém bodě se přesně drát dotýká kladky a při měření dalekohledem byla znatelná odchylka při šlápnutí na zem vedle této aparatury.

Metoda průhybu trámku: Největší chyba byla způsobena měřením výchylky  $y$ , která byla stejně velká jako statistické chyby způsobené nepřesně vylitými trámkami. Mosazný trámek byl vylit přesněji a byl měkčí, proto je chyba zhruba 2x menší než u trámku ocelového.

### 3. Metody

Vzhelem k tomu, že odchylky od přímky jsou velmi malé, byly splněny podmínky Hookova zákona. Pružnost deformace jsem ověřil měřením při odebrání závaží. Obě metody jsou řádově stejně přesné.

## Závěr

1. Změřil jsem modul pružnosti v tahu  $E$  oceli z protažení drátu,  $E_{\text{oceli d}} = (1,89 \pm 0,10) \cdot 10^{11}$  Pa

2. Změřil jsem modul pružnosti v tahu  $E$  oceli a mosazi z průhybu trámku,  $E_{\text{oceli}} = (2,042 \pm 0,067) \cdot 10^{11}$  Pa,  $E_{\text{mosazi}} = (1,040 \pm 0,027) \cdot 10^{11}$  Pa

3. Výsledky měření jsem graficky znázornil, grafy (1)(2)(3), modul pružnosti jsem určil užitím lineární regrese.

## Použitá literatura

[1] Studijní materiál ze stránek praktik matematicko-fyzikální fakulty

<http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/>

[2] J. Mikulčák a kol., Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce, Prometheus, 2003

[3] Brož, J. a kol., Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983

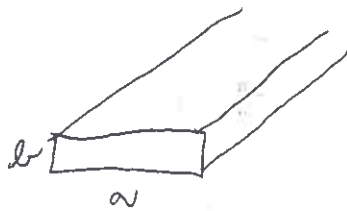
$n$	$\Delta x$ [cm]	$\Delta t$ [ms]	$v$ [cm/s]	$\Delta v$ [cm/s]	$n$	$\Delta x$ [cm]	$\Delta t$ [ms]	$v$ [cm/s]	$\Delta v$ [cm/s]
1,0	17,0	16,9	21,3	21,25	3,4	10,85	10,8	15,2	15,2
1,1	16,75	16,65	21	21	3,5	10,6	10,6	14,95	14,95
1,2	16,5	16,35	20,75	20,75	3,6	10,35	10,3	14,7	14,7
1,3	16,2	16,1	20,5	20,5	3,7	10,1	10,1	14,55	14,55
1,4	15,95	15,85	20,2	20,2	3,8	9,85	9,85	14,2	14,2
1,5	15,7	15,65	19,95	20,0	<del>scribbled out</del>				
1,6	15,4	15,35	19,7	19,7					
1,7	15,15	15,1	19,5	19,5					
1,8	14,85	14,85	19,2	19,2					
1,9	14,65	14,6	18,95	18,9	$d_{11} \pm 1 \text{ dillek}$ $L_0 = 114 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$ $L_1 = 82,9 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$				
2,0	14,35	14,3	18,7	18,65					
2,1	14,05	14,0	18,4	18,4					
2,2	13,8	13,75	18,15	18,2					
2,3	13,55	13,5	17,9	17,9	$w = 3,85 \text{ cm}$ $3,85 \text{ cm}$ $3,85 \text{ cm}$				
2,4	13,3	13,3	17,65	17,65					
2,5	13,05	13,0	17,4	17,4					
2,6	12,80	12,8	17,15	17,15					
2,7	12,55	12,5	16,9	16,9	$d_{11} =$ <del>scribbled out</del>				
2,8	12,3	12,3	16,65	16,65					
2,9	12,05	12,0	16,4	16,4					
3,0	11,80	11,8	16,15	16,15					
3,1	11,6	11,55	15,9	15,9	$0,51$ $0,505$ $0,507$ $0,507$ $0,507$ $0,507$ $0,509$ $0,508$				
3,2	11,45	11,3	15,65	15,7					
3,3	11,05	11,05	15,45	15,55					

Matematiko-fysikaini fakulta KU  
 Fysikaini praktikum I. 56

21-04-2018

0,51  
 0,505  
 0,507  
 0,507  
 0,507  
 0,507  
 0,509  
 0,508

$l = 41,2 \pm 0,3 \text{ mm}$  2 METODA



OCISZ [mm]      MOSAZ

α	11,77	11,86	α	11,8	11,82
<del>β</del>	11,93	11,94	<del>β</del>	11,87	11,85
	11,87	11,9		11,88	11,9
	11,9	11,92		11,86	11,87
	11,91	11,93		11,81	11,84

$\pm 0,005 \text{ mm}$

β	2,97	2,97	1,98	1,985
	2,965	2,97	1,985	1,98
	2,985	2,97	1,99	1,982
	2,965	2,96	1,98	1,98
	2,97	2,97	1,975	1,983



ACRZ

~~MOZ~~

mm[8]	↑ y [mm] ↓		mm[8]	↑ y [mm] ↓	
0	3,35	3,37	0	4,6	4,6
<del>50</del>	3,5	3,5	20	4,95	4,95
50	3,5	3,5	40	5,3	5,3
100	3,65	3,65	60	5,7	5,7
150	3,8	3,75	80	6,1	6,05
200	3,9	3,9	100	6,5	6,4
250	4,0	4,0	120	6,8	6,75
300	4,15	4,15	140	7,15	7,15
350	4,3	4,3	160	7,5	7,5
400	4,42	4,33	180	7,85	7,85
450	4,6	4,55	200	8,2	8,2
500	4,7	4,7			
550	4,85	4,85	220	8,6	8,6
600	5	5	240	8,9	8,95
650	5,1	5,15	260	9,25	9,3
700	5,25	5,25	280	9,65	9,65
750	5,4	5,4	300	10	10
800	5,4	5,4			
850	5,52	5,52			
900	5,65	5,65			
950	5,80	5,8			
	5,92	5,92			
1000	6,08	6,08			