

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

## Praktikum 2

Úloha č. 8

Název: **Měření impedancí rezonanční metodou**

Pracoval: **Jiří Kratochvíl** stud.sk.: 11 dne: **10.11.2010**

Odevzdal dne: .....

Hezbe'!

	možný počet bodů	udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	5
Teoretická část	0 - 1	1
Výsledky měření	0 - 8	7
Diskuse výsledků	0 - 4	3
Závěr	0 - 1	1
Seznam použité literatury	0 - 1	1
<b>Celkem</b>	max. 20	18

Posuzoval: *Kratochvíl* .....

dne: *28.11.2010* .....

## Pracovní úkol:

1. Změřte indukčnosti  $L(A)$ ,  $L(B)$  a vlastní kapacity  $C_A$ ,  $C_B$  cívek A a B.
2. Určete vzájemnou indukčnost  $M$  cívek A a B umístěných ve svorkách 1,2 a 3,4 z měření jejich celkové indukčnosti.
3. Měření indukčnosti a vzájemné indukčnosti několikrát opakujte a stanovte chybu měření.
4. Pro jedno zapojení proměřte rezonanční křivku. Naměřený průběh porovnejte graficky s teoretickým a vyhodnoťte míru útlumu, činitel jakosti a náhradní sériový odpor obvodu.
5. Proved'te kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek vynesete do grafu.

## Obsah:

- 1 Teoretická část
  - 1.1 Statistické zpracování
  - 1.2 Rezonance v RLC obvodu
  - 1.3 Vzájemná indukčnost
  - 1.4 Redukovaná rezonanční křivka
  - 1.5 Kalibrace otočného kondenzátoru
- 2 Výsledky měření
  - 2.1 Pomůcky a měřicí přístroje
  - 2.2 Změřte indukčnosti  $L(A)$ ,  $L(B)$  a vlastní kapacity  $C_A$ ,  $C_B$  cívek A a B
  - 2.3 Určete vzájemnou indukčnost  $M$  cívek A a B
  - 2.4 Rezonanční křivka
  - 2.5 Kalibrace otočného kondenzátoru
- 3 Diskuse
- 4 Závěr
- 5 Seznam použité literatury

## 1 Teoretická část

### **1.1 Statistické zpracování**

Chyby nepřímého měření sčítány metodou přenosu chyb dle vzorce

$$\sigma = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\sigma_i)^2} \quad (s1)$$

$\sigma$  - výsledná chyba měření,  $f$  - fyzikální vztah,  $x_i$  - jednotlivé veličiny ze vztahu  $f$ ,  
 $\sigma_i$  - chyby jednotlivých veličin ze vztahu  $f$

Chyba statistická a chyba měřidla sečtena vzorcem

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_m^2 + \sigma_s^2)} \quad (s2)$$

$\sigma$  - výsledná chyba měření,  $\sigma_m$  - chyba měřidla,  $\sigma_s$  - statistická chyba

Chyba aritmetického průměru počítána dle vztahu

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - x)^2}{n}} \quad (s3)$$

$\sigma$  - výsledná chyba měření,  $x_i$  - hodnota jednotlivých měření,  $x$  - průměrná hodnota,  
 $n$  - počet měření

Asymptotická chyba regrese sečtena ve čtverci s chybou měření.

## 1.2 Rezonance v RLC obvodu

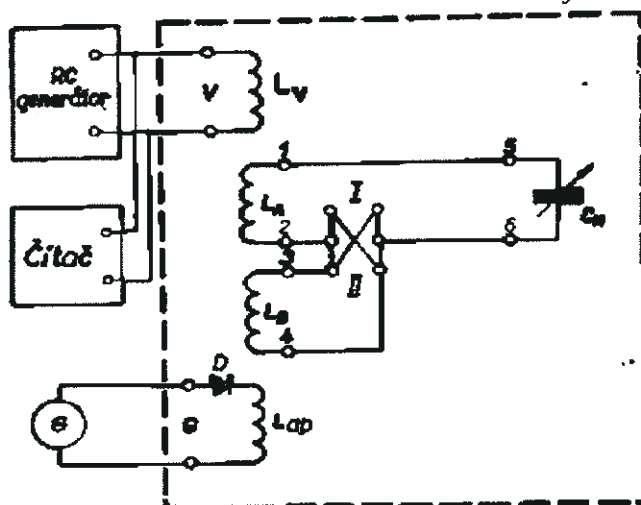
Pro úhlovou rezonanční frekvenci  $\omega_r$  platí vztah (1)

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

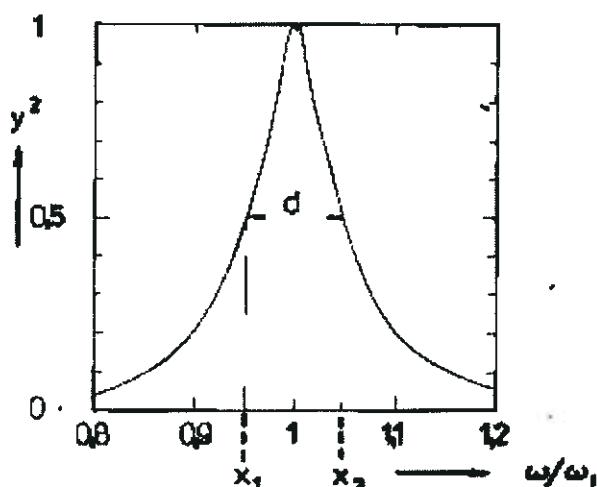
kde je  $L$  - indukčnost a  $C$  - kapacita.

Kapacita  $C$  je složena ze dvou kapacit z kapacity kondenzátoru  $C_N$  a z vlastní kapacity cívky  $C_L$  platí tedy  $C = C_N + C_L$  z čehož dostáváme dosazením do (1) spolu s dosazením  $\omega = 2\pi f_r$ , kde  $f_r$  je rezonanční frekvence, následující vztah ze kterého můžeme spočítat lineární regresí  $L$  a  $C_L$

$$\frac{1}{4\pi^2 f^2} = L(C_N + C_L) \quad (2)$$



Zapojení č.1



Obrázek č.1: Rezonanční křivka

## 1.3 Vzájemná indukčnost

Pro vzájemnou indukčnost cívek  $M$  v zapojených v sérii platí vztah

$$L_{\pm} = L_A + L_B \pm 2M$$

kde  $L_{\pm}$  jsou indukčnosti při opačném a souhlasném směru vinutí.

Z toho plyne, že vzájemnou indukčnost spočítáme dle vztahu

$$M = \frac{\Delta L_{\pm}}{4} \quad \text{nebo} \quad \Delta L_{\pm} = L_{+} - L_{-} \quad (3)$$

## 1.4 Redukovaná rezonanční křivka

Redukovaná rezonanční křivka v sériovém RLC obvodu je křivka, kde na osu  $x$  vynášíme hodnotu  $\omega/\omega_r$ , a na osu  $y^2$  dosazujeme za  $y$  poměr proudů  $I/I_r$ , viz následující 2 vztahy.

$$x = \frac{f}{f_r} = \frac{\omega}{\omega_r} \quad (4)$$

$$y^2 = \left(\frac{I}{I_r}\right)^2 = \frac{g}{g_r} \quad (5)$$

kde  $g$  je výchylka na galvanometru a  $g_r$  je výchylka galvanometru při rezonanci,  $I$  proud tekoucí obvodem  $I_r$  proud tekoucí obvodem při rezonanci

Teoretická závislost rezonanční křivky pro sériový RLC obvod je

$$y^2 = \frac{d^2}{d^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \quad (6)$$

kde  $d$  je míra útlumu.

Míra útlumu je definována dle vztahu

$$d = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (7)$$

kde  $R$  je hodnota náhradního odporu. Hodnota  $d$  je šířka redukované rezonanční křivky v polovině maximální hodnoty  $y^2$  viz **obrázek č.1**.

Dále zavedeme činitel jakosti cívky  $Q$ , který je definován vztahem

$$Q = \frac{1}{d} \quad (8)$$

[1]

## 1.5 Kalibrace otočného kondenzátoru

Vydeme z faktu, že dva kondenzátory zapojené paralelně mají kapacitu rovnou součtu jejich kapacit. V zapojení č.1 bude místo jednoho otočného kondenzátoru dvojice paralelně zapojených otočných kondenzátorů. Jeden referenční kondenzátor, tj. zkalibrovaný kondenzátor a druhý kondenzátor je ten, který chceme zkalibrovat.

Nastavíme na referenčním kondenzátoru pevnou referenční hodnotu kapacity a nastavíme rezonanci pomocí RC generátoru, poté připojíme kalibrovaný kondenzátor, nastavíme ho na určitou hodnotu, a nastavíme rezonanci pomocí referenčního kondenzátoru. Tuto hodnotu pak odečteme od pevné referenční hodnoty kapacity. Tento rozdíl je kapacita kalibrovaného kondenzátoru při daném nastavení, toto provedeme pro různá otočení kalibrovaného kondenzátoru.

## 2 Výsledky měření

### 2.1 Pomůcky a měřicí přístroje

RC generátor o měnitelné frekvenci a výkonu.

Galvanometr

Dioda s kvadratickou charakteristikou

Dvě cívky

Nastavitelný kondenzátor zkalibrovaný, přesnost 0,5pF

Otočný kondenzátor nezkalibrovaný, přesnost 1°

### 2.2 Změřte indukčnosti $L(A)$ , $L(B)$ a vlastní kapacity $C_A$ , $C_B$ cívek A a B

Obvod byl sestaven dle zapojení (1). Rezonanční křivka je z obou stran symetrická viz **obrázek č.1**. Toho využijeme, abychom dostali lepší přesnost měření. Kdybychom určovali rezonanční frekvenci přímo měli bychom chybu zhruba 5Hz jelikož křivka je v maximu plochá. Využijeme tedy toho, že křivka je symetrická a má větší sklon před a za maximem. Změříme hodnoty při stejné výchylce galvanometru a spočítáme jejich aritmetický průměr takto můžeme dosáhnout přesnosti 1Hz.

Nejdříve jsme zapojili cívku A, nastavili kapacitu. Poté jsme zhruba nastavili rezonanční frekvenci na RC generátoru. Odhadli jsme tedy, při jaké frekvenci pozorujeme na galvanometru největší rychlost změny výchylky. Při této hodnotě frekvence jsme nastavili výkon generátoru tak abychom nastavili na galvanometru nejvyšší hodnotu tj 50. Zaznamenali jsme tuto frekvenci, poté jsme nastavili RC tak abychom našli symetrickou hodnotu, tj aby galvanometr ukazoval 50 a měli jsme jinou frekvenci. Totéž jsme udělali i pro cívku B.

Takto jsme proměřili závislost rezonanční frekvence na kapacitě kondenzátoru viz **tabulka č.1**

### Tabulka č.1: Závislost rezonanční frekvence na kapacitě

$f(A1), f(A2)$  - symetrické hodnoty frekvence cívky A,  $f(A)$  - výsledná hodnota frekvence cívky A  
 $f(B1), f(B2)$  - symetrické hodnoty frekvence cívky B,  $f(B)$  - výsledná hodnota frekvence cívky B  
 C - kapacita nastavitelného kondenzátoru

C	f(A1)	f(A2)	f(A)	f(B1)	f(B2)	f(B)
pF	Hz	Hz	Hz	Hz	Hz	Hz
100	832	892	862	892	943	877
150	719	779	749	797	744	773
200	644	698	671	707	647	689
300	560	584	572	586	539	579
400	485	522	503,5	512	472	507,75
500	467	443	455	461	425	458
600	435	405	420	421	389	420,5
700	405	378	391,5	391	361	391,25
800	357	379	368	339	366	353,5
900	358	338	348	346	320	347
1000	342	321	331,5	329	304	330,25
1100	327	307	317	314	290	315,5

$\sigma(f) = 1\text{Hz}$  - chyba frekvence  
 $\sigma(C) = 1\text{pF}$  - chyba nastavení kondenzátoru

Z lineární regrese dle vztahu (2) jsme určili parametry  $L(A), L(B), C_A, C_B$

indukčnost cívky A je  $L(A) = (218,2 \pm 0,3) \mu\text{H}$

indukčnost cívky B je  $L(B) = (223,0 \pm 0,5) \mu\text{H}$

vlastní kapacita cívky A je  $C_A = (57 \pm 1) \text{pF}$

vlastní kapacita cívky B je  $C_B = (42 \pm 1) \text{pF}$

*zde je problém! ... C<sub>B</sub> upřesnit ještě a L<sub>B</sub> měřit oprávněně ...*

### 2.3 Určete vzájemnou indukčnost M cívek A a B

Zde budeme postupovat stejně jako v oddílu 2.2. Naměřené hodnoty jsou v tabulce č.2.

#### Tabulka č.2: Vzájemná indukčnost

$f_{+1}, f_{-1}$  - symetrické hodnoty frekvence při shodné orientaci vinutí,

$f_+$  - výsledná hodnota rezonanční frekvence při stejné orientaci vinutí,

$f_{-1}, f_{-2}$  - symetrické hodnoty frekvence cívky druhé orientaci vinutí,

$f_-$  - výsledná hodnota rezonanční frekvence cívky druhé orientaci vinutí

C - kapacita nastavitelného kondenzátoru

C	$f_{+1}$	$f_{+2}$	$f_+$	$f(L21)$	$f(22)$	$f(2)$
pF	Hz	Hz	Hz	Hz	Hz	Hz
100	588	635	611,5	758	773	765,5
300	395	358	376,5	461	481	471
500	312	280	296	360	380	370
700	265	238	251,5	306	322	314
900	234	212	223	271	285	278
1100	204	200	202	258	246	252

$\sigma(f) = 1\text{Hz}$  - chyba frekvence  
 $\sigma(C) = 1\text{pF}$  - chyba nastavení kondenzátoru

Z lineární regrese dle vztahu (2) jsme určili parametry  $L_+, L_-, C_+, C_-$

indukčnost cívek při souhlasném zapojení je  $L_+ = (552,7 \pm 0,7) \mu\text{H}$

indukčnost cívek při nesouhlasném zapojení je  $L_- = (355,8 \pm 0,3) \mu\text{H}$

vlastní kapacita cívek při souhlasném zapojení je  $C_+ = (23,1 \pm 0,9) \text{pF}$

vlastní kapacita cívek při nesouhlasném zapojení je  $C_- = (21,1 \pm 0,6) \text{pF}$

Vzájemnou indukčnost cívek spočítáme dle vztahu (3)  $M = (49,2 \pm 0,8) \mu\text{H}$ .

*→ vždy výle. kin. regrese chyba!*

*Zde by bylo vhodné provést test relativity a obj. spole. (?) a pak diskutovat*

## 2.4 Rezonanční křivka

Rezonanční křivku jsme proměřili pro fixní kapacitu  $C = (500 \pm 0,5) \text{ pF}$  a pro cívku A. Změřili jsme výchylku galvanometru v závislosti na frekvenci okolo rezonanční frekvence. Poté jsme dopočítali hodnoty  $x$  a  $y$  dle vztahů (4) a (5). Výsledky jsou v **tabulce č.3** a vyneseny do **grafu č.1**. Jelikož jsme měli zapojenou diodu s kvadratickou charakteristikou brali jsme výchylku na galvanometru jako  $y^2$ .

*Nezapomenout napájecí zdroj!*

**Tabulka č.2**

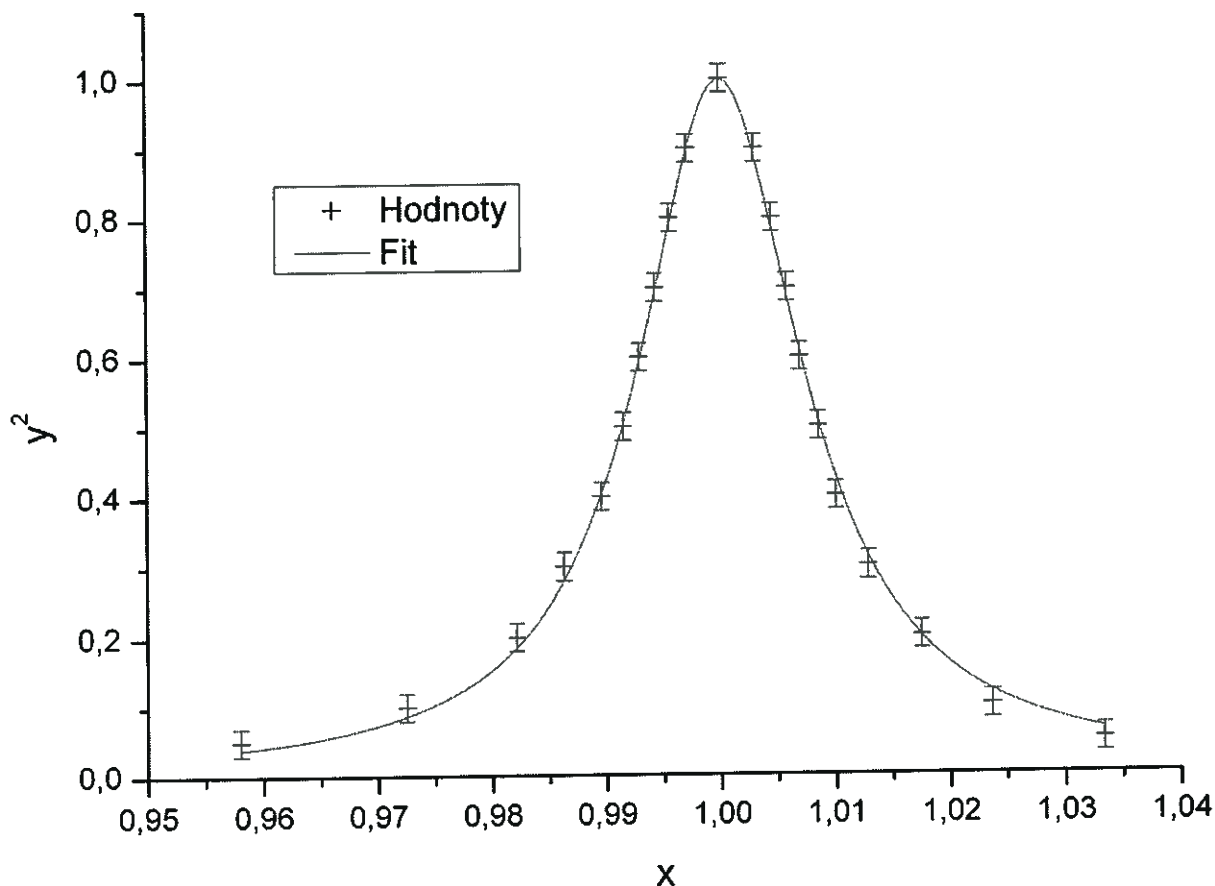
*výchylka* - hodnota odečtená z galvanometru,  $f_{1,2}$  - hodnoty frekvencí při přibližování k rezonanci z jedné a z druhé strany,  $x_{1,2}$  -  $x$ -ová hodnota v grafu,  $y^2$  -  $y$ -ová hodnota v grafu

výchylka	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$x_1$	$x_2$	$y^2$
2,5	472,93	438,45	1,0333	0,9580	0,05
5	468,5	445,09	1,0236	0,9725	0,1
10	465,65	449,49	1,0174	0,9821	0,2
15	463,54	451,44	1,0128	0,9863	0,3
20	462,26	452,94	1,0100	0,9896	0,4
25	461,6	453,78	1,0085	0,9915	0,5
30	460,83	454,42	1,0069	0,9929	0,6
35	460,34	455,06	1,0058	0,9943	0,7
40	459,73	455,66	1,0045	0,9956	0,8
45	459,05	456,37	1,0030	0,9971	0,9
50	457,69		1,0000		1

$\sigma(f) = 0.01 \text{ Hz}$  - chyba frekvence  
 $\sigma(y) = 1$  - chyba odečítání výchylky

*1 kHz ?*

**Graf č.1: Rezonanční křivka pro cívku A**



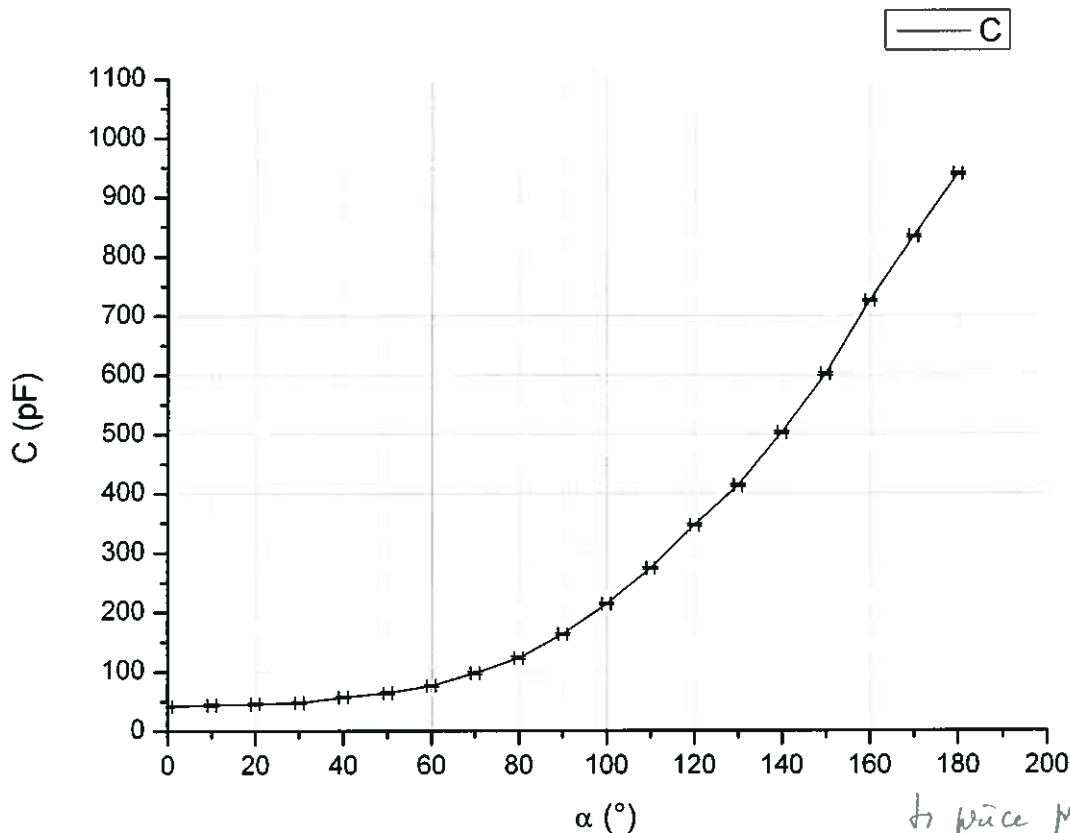
Tyto hodnoty jsem proložil vztahem (6) z něž jsem určil parametr  $d$ , který vyšel  $d = (1,72 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$ .

Poté jsem spočítal činitel jakosti cívky dle vztahu (8), který vyšel  $Q = (58,1 \pm 1,3)$   
Náhradní sériový odpor spočítáme dosazením do (7)  $R = (11,36 \pm 0,3) \Omega$

## 2.5 Kalibrace otočného kondenzátoru

Kalibraci kondenzátoru provedeme dle odstavce 1.5. Jako referenční hodnotu kapacity jsme nastavili  $(1100 \pm 0,5) \text{pF}$ . Kalibrační křivka je vynesena v grafu č.2.

**Graf č.2: Kalibrační křivka otočného kondenzátoru**



*to práce při provádění bylo zpracováno ani měřené parametry*

## 3. Diskuse

### 3.1. Indukčnost cívek jejich vlastní kapacity a vzájemná indukčnost

Chyby indukčnosti jsou takto malé díky lineární regresi a také díky nepřímému měření rezonanční frekvence tj. změření dvou frekvencí při stejné výchylce galvanometru a jejich zprůměrováním. Chyba odečítání z galvanometru byla dokonce menší než nastavování frekvence RC generátoru. Nezjistili jsme žádnou závislost indukčnosti na kapacitě kondenzátoru Cívky mají nezanedbatelné kapacity i když měly voštinové vinutí.

Vidíme, že nemůžeme spočítat kapacitu sériově zapojených cívek jako sériové zapojení kondenzátorů. Rozdíl ale není velký, u souhlasného směru zapojení je téměř shodný v rámci chyby ale u nesouhlasného směru se liší asi o 2pF. Kapacita sériově zapojených cívek je jiná při souhlasném a nesouhlasném proudu a to o  $(2 \pm 1,1) \text{pF}$ .

Ikdyž jsme měnili proud procházející cívkou během měření, abychom mohli přesněji měřit galvanometrem, indukčnost zůstala téměř stejná. To je dáno tím, že jsme měli cívku bez jádra, kde indukčnost téměř nezávisí na procházejícím proudu.

### 3.2. Rezonanční křivka

Fit rezonanční křivkou (6) se trefil do všech errorbarů naměřených hodnot. Teoretická závislost se tedy potvrdila. Dioda s kvadratickou charakteristikou byla také zřejmě dobře vyrobena.

Největší chyba při tomto měření byla způsobena malou škálou galvanometru.

Cívku mohu ohodnotit jako průměrně kvalitní, jelikož normální cívky dosahují hodnot činitele jakosti od 10 do 100.

### 3.3. Kalibrace otočného kondenzátoru

Při malých úhlech  $\alpha$  se kapacita kondenzátoru téměř nezvyšuje, což je způsobeno nejspíše tím, že kondenzátorové desky do sebe ještě nezajely. Ve středních hodnotách máme mírně kvadratickou závislost. Při vyšších úhlech roste kapacita téměř lineárně. Tato závislost je určena tvarem ploch uvnitř kondenzátoru. Dle našeho názoru by toto mohlo odpovídat půlkruhům zajištěným do sebe. Kondenzátor má počáteční kapacitu  $(42 \pm 0,5) \text{ pF}$ . U tohoto měření byla největší chyba způsobena úhlovou škálou.

## 4. Závěr

Změřili jsme indukčnosti cívek a jejich vlastní kapacity. Indukčnost cívky A je  $L(A) = (218,2 \pm 0,3) \mu\text{H}$ , indukčnost cívky B je  $L(B) = (223,0 \pm 0,5) \mu\text{H}$ , vlastní kapacita cívky A je  $C_A = (57 \pm 1) \text{ pF}$ , vlastní kapacita cívky B je  $C_B = (42 \pm 1) \text{ pF}$ . *h u nepovedlo.*

Určili jsme vzájemnou indukčnost  $M = (49,2 \pm 0,8) \mu\text{H}$  cívek A a B umístěných ve svorkách 1,2 a 3,4 z měření jejich celkové indukčnosti.

Chybu měření indukčnosti jsme stanovili z lineární regrese.

Pro zapojení cívky A a kapacitu  $C = 500 \text{ pF}$  jsme proměřili rezonanční křivku, která je vynesena do grafu č.1. Naměřený průběh jsme porovnali graficky s teoretickým. Vyhodnotili jsme míru útlumu

$d = (1,72 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$ , činitel jakosti  $Q = (58,1 \pm 1,3)$  a náhradní sériový odpor obvodu

$R = (11,36 \pm 0,3) \Omega$ .

Provedli jsme kalibraci otočného kondenzátoru diferenční metodou a výsledek jsme vynesli do grafu č.2.

## 5. Seznam použité literatury

- [1] R. Bakule, J. Šternberk, Fyzikální praktikum II, mff uk
- [2] Brož, J. a kol., Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983

*řeknout že se  
provozt na graf  
 $\frac{1}{\omega^2} \sim L_3(C + C_0)$ ?*

*řekne, že šlo k odčtu  
při urč. směrnice  
 $\Rightarrow$  pak si odčte  $C_0$*

*Děsitem mohou být "uhlí" brož u  
některých u měření...*



Musuly

$\square \odot$	c
10	<del>10</del> <del>56</del>
20	10 84
30	10 52
40	10 43
50	10 36
60	10 23,5
70	10 2,5
80	9 77
90	9 37
100	8 85
110	8 25
120	7 83,5
130	<del>6</del> 86,5
140	5 97
150	4 98,5
160	3 78
170	2 65
180	1 61
$\odot$	<del>10</del> 5 8
x	1000

Matematicko - fyzikální fakulta UK  
Základní fyzikální praktikum

Musuly  
11. 11. 10

*[Handwritten mark]*

$\odot$  JK

$C = 500$

$\gamma$	$f [m^2]$
<del>5</del>	<del>468,50</del>
10	455,08
15	463,54
20	462,26
25	461,60
30	460,83
35	460,34
40	459,73
45	459,05
50	458,00
25	472,93

$\pm 1$

$\pm 1$

50	457,58
45	456,37
40	455,66
35	455,06
30	454,42
25	453,78
20	452,94
15	451,44
10	449,49
8	445,092
25	438,45

FIX 1100

f<sub>1</sub>

f<sub>2</sub>

f<sub>3</sub>

~~1100~~ ~~320~~ ~~317~~ ~~307~~

FIX 1100



10	314		
20			
30			
40			
80			
60			
70			
80			
90			
100			
110			
120			
130			
140			
150			
160			
170			
180			
0	314	305	

309 320

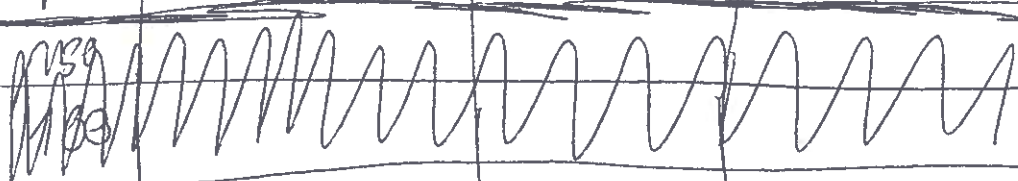
f<sub>1</sub> = 320, 317



C 1100

± 5pF 1001

6 ZMÉRŮ INOV KONECT L(A), L(B)

C [NF]	$f_A$ [kHz]	$f_{A1}$ [kHz]	$f_{A2}$ [kHz]
500	<del>458</del> 422	<del>467</del>	443
600	422	435	408
700	392	408	<del>378</del>
800	367	387	379
900	<del>349</del>	358	338
1000	333	342	321
1100	319	327	307
400		485	522
<del>300</del>		560	583
200		644	698
150		719	779
100		832	892
			
	$\pm 5 \text{ kHz}$		$\pm 1 \text{ kHz}$

A

11

GALVANOMETER



$C [PF]$	$f_{31} [Hz]$	$f_{32} [Hz]$
100	892	943
130	797	744
200	707	647
300	588	539
400	512	472
500	461	425
600	421	389
700	391	361
800	339	366
900	346	328
1000	329	304
1100	314	290

~~$\sigma$~~  
 VERIFIED  
~~$X$~~

~~B~~  
A

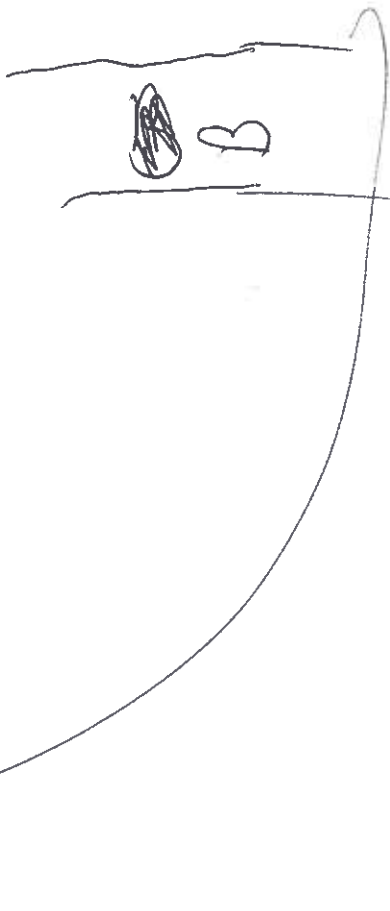
⊕ I ⊖ II ⊖ I ⊖ II

C[NF]	$f_{+1}$	<del><math>f_{+1}</math></del>	$f_{-1}$	$f_{+1}$
1100	204	200	258	246
900	233	212	271	285
700	267	258	306	322
500	312	280	350	380
300	395	358	461	481
200	588	538	758	773

5 PARAZITNI KAPACITA CMEK

$C_{N1} = 1000 \text{ pF}$   
 $f_1 = 398$

$2f_1 = 636$   
 $C_{N2} = 222$



<del>150 nF</del>	
150 nF	<del>753</del>
753 nF	387

$753 : 2 = 376,5$   
 $\frac{18}{13}$