

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

Praktikum III

Úloha č. 13

Název: Studium rentgenového záření

Pracoval: Jiří Kratochvíl stud.sk.:11 dne: 1.4.

Odevzdal dne: 6.4.2011

	možný počet bodů	udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	5
Teoretická část	0 - 1	1
Výsledky měření	0 - 8	8
Diskuse výsledků	0 - 4	4
Závěr	0 - 1	1
Seznam použité literatury	0 - 1	1
Celkem	max. 20	20

Posuzoval: Němec

dne: 13.4.2011

Pracovní úkol:

1. Ze zadané hustoty krystalu fluoridu lithného určete vzdálenost d hlavních atomových rovin.
2. Proměřte úhlovou závislost intenzity difraktovaného rentgenového záření při pevné orientaci krystalu a ověřte Poissonovo rozdělení emitování částic¹.
3. Proměřte spektrum rentgenového záření při konstantním anodovém napětí rentgenky $U_a = 20 \text{ kV}$.
4. Z mezní hodnoty energie spojitého spektra určete Planckovu konstantu, porovnejte s tabelovanou hodnotou. Určete vlnové délky čar K_α , K_β (porovnejte s tabelovanými hodnotami), spočtete jejich vlnočty a odpovídající energetické rozdíly vyjádřete v keV. Určete konstanty stínění.

1 Teorie

1.1 Statistické zpracování

Chyby nepřímého měření sčítány metodou přenosu chyb dle vzorce

$$\sigma = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\sigma_i)^2} \quad (\text{s1})$$

σ - výsledná chyba měření, f - fyzikální vztah, x_i - jednotlivé veličiny ze vztahu f ,
 σ_i - chyby jednotlivých veličin ze vztahu f

Chyba statistická a chyba měřidla sečtena vzorcem

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_m^2 + \sigma_s^2)} \quad (\text{s2})$$

σ - výsledná chyba měření, σ_m - chyba měřidla, σ_s - statistická chyba

Chyba aritmetického průměru počítána dle vztahu

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n^2}} \quad (\text{s3})$$

σ - výsledná chyba měření, x_i - hodnota jednotlivých měření, \bar{x} - průměrná hodnota,
 n - počet měření

[2]

Regrese počítána v programu gnuplot, asymptotická chyba fitu sečtena ve čtverci s chybou měření.

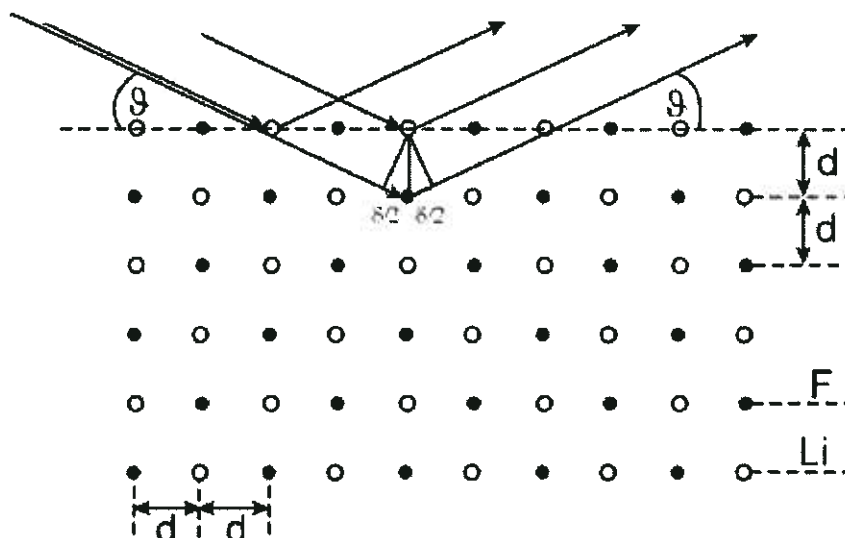
Značení: Pokud není u hodnoty uvedena chyba, je chyba brána jako číslo jedna na posledním desetinném čísle hodnoty.

¹ Po domluvě s vedoucím praktika. Abychom alespoň nějak zužitkovali trojitě měření spektra s pevně natočeným krystalem. Měřit toto spektrum třikrát by bylo jinak naprosto zbytečné.

1.2 Určení vzdálenosti hlavních atomových rovin a difrakční podmínka

Fluorid-lithný tvoří kubickou plošně centrovanou mříž. Jedna hlavní rovina je zobrazena na *obrázku č.1*.

Obrázek č.1: Hlavní atomová rovina



Na 1 buňku krystalu LiF připadají 2 atomy fluoru a 2 lithia. Vzdálenost hlavních atomových rovin d dostaneme dle vzorce

$$d = \sqrt{\left(\frac{M_{LiF}}{2\rho N_A}\right)} \quad (1)$$

kde M_{LiF} je molární hmotnost molekuly LiF, N_A je avogadrova konstanta a ρ je hustota krystalu.

Dle teorie otce a syna Braggových dostaneme podmínku pro interferenční maxima

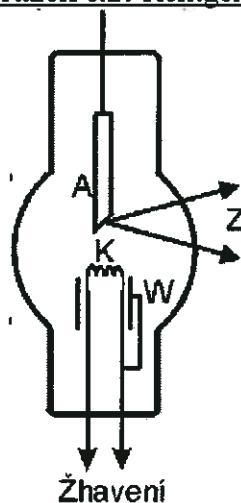
$$2d \sin \theta = k\lambda \quad (2)$$

Interferující paprsky jsou zobrazeny na *obrázku č.1* kde je δ dráhový rozdíl a θ je úhel dopadu.

1.3 Vytvoření rentgenového záření

Pro vytvoření rentgenového záření používáme rentgenku, jejíž schéma je na *obrázku č.2*.

Obrázek č.2: Rentgenka



Rentgenka je složená z katody K a anody A ve vakuové baňce, katoda je obklopena dutým válcem W, který zajišťuje fokusaci elektronů. Záření vzniká nažhavením katody, která poté emituje elektrony, které jsou urychlovány anodovým napětím U_a a dopadají na (v našem případě měděnou) anodu. Po dopadu na anodu vznikají dva typy záření brzděné rentgenové záření a charakteristické záření.

1.4 Brzdné záření

Brzdné záření vzniká brzděním elektronů o atomová jádra materiálu anody. Spektrum tohoto záření je spojité. Toto záření je pro každý materiál anody stejné, závisí pouze na rentgence. Na krátkovlnné straně klesá intenzita spektra ostře k nule a od jisté vlnové délky λ_m je intenzita záření nulová. Tato mezní hodnota odpovídá případu, kdy elektron předá veškerou svoji energii E vznikajícímu fotonu. Takže pro odpovídající frekvenci fotonu f_m platí následující vztah

$$E_m = \frac{hc}{\lambda_m} = hf_m = eU_a \quad (3)$$

kde c je rychlost světla a e je náboj elektronu h je Planckova konstanta. Z tohoto vztahumůžeme určit Planckovu konstantu.

Vlnočet získáme z vlnové délky dle následujícího vztahu

$$\nu = 1/\lambda \quad (4)$$

Vztah pro energii fotonů E je

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (5)$$

1.5 Charakteristické záření

Charakteristické záření, které vzniká vyražením elektronu anody z nižších energetických hladin. Na jeho místo spadne elektron z vyšší hladiny a tím vyžáří kvantum energie. Toto spektrum je čárové a odpovídá materiálu anody.

Čára označovaná jako K_α odpovídá přeskoku elektronu z hladiny s hlavním kvantovým číslem $n = 2$ na hladinu $n = 1$. Čára K_β odpovídá přeskoku s $n = 3$ na hladinu s $n = 1$. Pro přeskok mezi hladinami n_1 a n_2 máme dle Bohrovy teorie vztah pro vlnočet ν_{12}

$$\nu_{12} = R(Z-s)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (6)$$

kde R je Rydbergova konstanta Z je atomové číslo prvku a s je stínící konstanta.

[1]

2 Měření

2.1 Vzdálenost atomových rovin

Monokrystal fluoridu lithného měl hustotu $\rho = 2601 \text{ kg.m}^{-3}$ [1]. Molární hmotnost Lithia je $M_{Li} = 6,941 \text{ g.mol}^{-1}$ [3], molární hmotnost fluoru $M_F = 18,998 \text{ g.mol}^{-1}$ [3] z toho dostaneme molární hmotnost fluoridu lithného, která je $M_{LiF} = 25,939 \text{ g.mol}^{-1}$. Avogadrova konstanta je $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ [3]. Z těchto údajů dle vzorce (1) určíme vzdálenost hlavních atomových rovin $d = 0,2023 \text{ nm}$.

2.2 Úhlová závislost intenzity pro pevné natočení krystalu

Měřili jsme úhlovou závislost intenzity pro pevné natočení krystalu $\Theta = (14 \pm 0,5)^\circ$. Úhly jsou měřeny s přesností $\pm 0,5^\circ$. Na rentgenku jsme přivedli konstantní napětí $U_a = (20,0 \pm 1,3) \text{ keV}$. Používali jsme ampérmetr s třídou přesnosti $1,5\% + 1 \text{ dílek}$. Měřili jsme pomocí Geiger-Mullerova počítače, který jsme nastavovali v rozsahu $\alpha = 10 \text{ až } 50^\circ$. Měřili jsme po dobu 40 sekund , platí pro každé následující měření. Počet detekovaných částic N je úměrný intenzitě záření. Nedetekují se všechny částice, měříme tedy relativní intenzitu, proto zavádím jednotky *counts*.

Víme, že počet vyražených částic se chová dle Poissonova rozdělení. Z toho vyplývá, že můžeme očekávat, že rozptyl bude roven odmocnině ze střední hodnoty počtu detekovaných částic. Toto jsme chtěli ověřit, proto jsme prováděli měření 3x.

Šum (tj. měření při vypnuté rentgence) jsme měřili třikrát a to s výslednými hodnotami $n_s = 18, 36 \text{ a } 20$, což nám dává hodnotu pro šum $N_s = (25 \pm 9) \text{ counts}$.

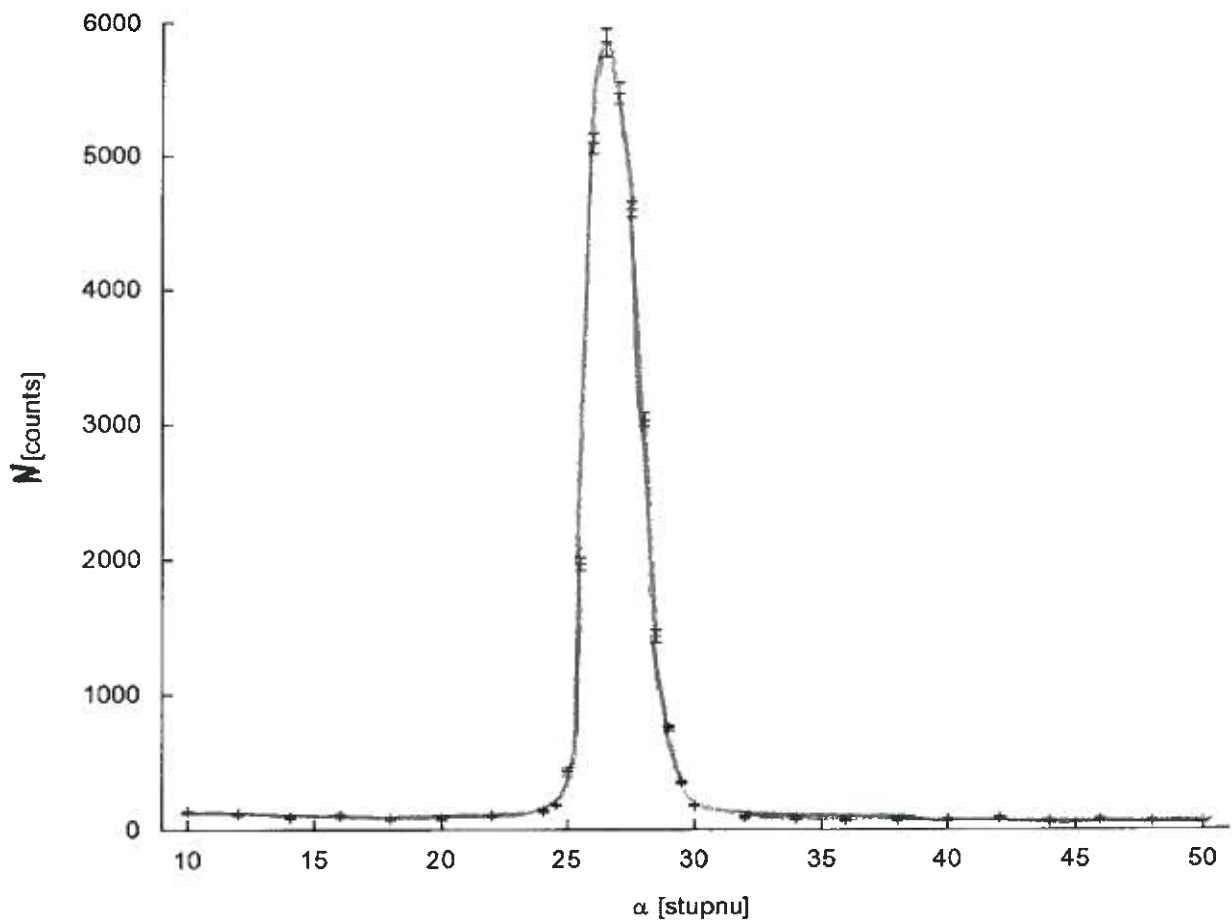
Naměřené hodnoty jsou v *tabulce č.1* a zobrazeny v *grafu č.1*. N_{av} je průměrná hodnota třech měření. Chyba $\sigma(n)$ je z důvodu malého počtu měření nedostatečně přesná, proto zavádíme chybu σ_{av} , která je aritmetickým průměrem chyby dané hodnoty a dvou chyb sousedních hodnot. $\sigma_{Poisson}$ je chyba, kterou jsme spočítali dle Poissonova rozdělení. Poissonovo rozdělení testuji v *grafu č.2*.

Tabulka č.1: Úhlová závislost intenzity pro pevné natočení krystalu

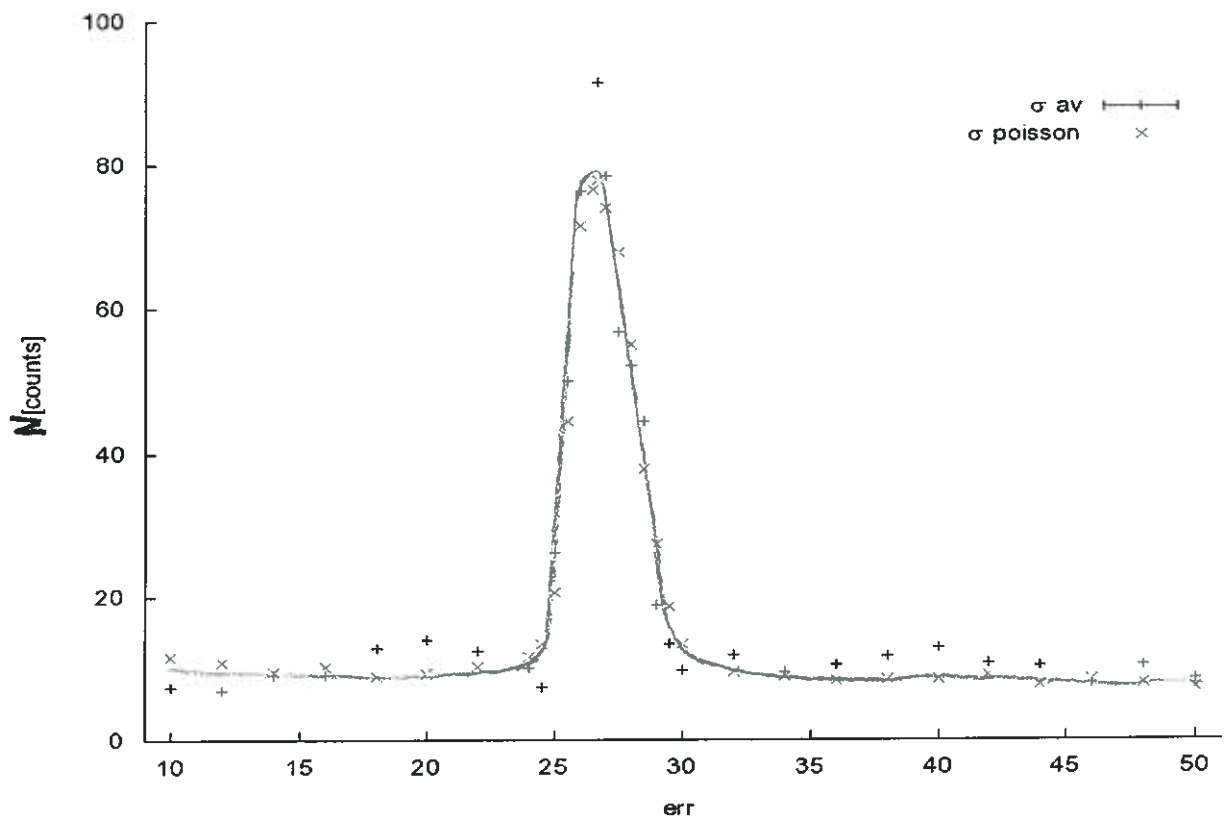
α [°]	N [counts]	N [counts]	N [counts]	N_{av} [counts]	$\sigma(N)$ [counts]	$\sigma_{av}(N)$ [counts]	$\sigma_{Poisson}(N)$ [counts]
10	134	136	138	136	1,63	7,42	11,66
12	102	114	134	116,67	13,2	7	10,8
14	94	96	82	90,67	6,18	9,2	9,52
16	96	116	104	105,33	8,22	9,03	10,26
18	62	84	92	79,33	12,68	12,79	8,91
20	82	110	68	86,67	17,46	13,87	9,31
22	120	92	108	106,67	11,47	12,33	10,33
24	124	142	140	135,33	8,06	10,13	11,63
24,5	196	174	172	180,67	10,87	7,29	13,44
25	428	421	426	425	2,94	26,22	20,62
25,5	1873	2021	1997	1963,67	64,86	49,98	44,31
26	5113	4994	5194	5100,33	82,14	76,42	71,42
26,5	5903	5748	5937	5862,67	82,26	104,1	76,57
26,66	6188	6173	5867	6076	147,91	91,39	77,95
27	5488	5418	5524	5476,67	44,01	78,48	74
27,5	4653	4547	4610	4603,33	43,53	56,76	67,85
28	3071	2921	3114	3035,33	82,73	52,09	55,09
28,5	1447	1452	1386	1428,33	30	44,41	37,79
29	728	749	778	751,67	20,5	18,8	27,42
29,5	348	352	338	346	5,89	13,43	18,6
30	166	172	198	178,67	13,89	9,78	13,37
32	100	96	78	91,33	9,57	11,76	9,56
34	86	88	62	78,67	11,81	9,58	8,87
36	78	68	60	68,67	7,36	10,48	8,29
38	64	64	90	72,67	12,26	11,6	8,52
40	60	94	64	72,67	15,17	12,77	8,52
42	98	80	72	83,33	10,87	10,59	9,13
44	60	52	66	59,33	5,73	10,29	7,7
46	68	58	92	72,67	14,27	8,04	8,52
48	68	58	64	63,33	4,11	10,49	7,96
50	38	56	70	54,67	13,1	8,6	7,39

Jako maximum jsme určili hodnotu úhlu $\alpha_{max} = (26,66 \pm 0,50)^\circ$.

Graf č.1: Úhlová závislost intensity pro pevné natočení krystalu



Graf č.2: Test poissonova rozdění



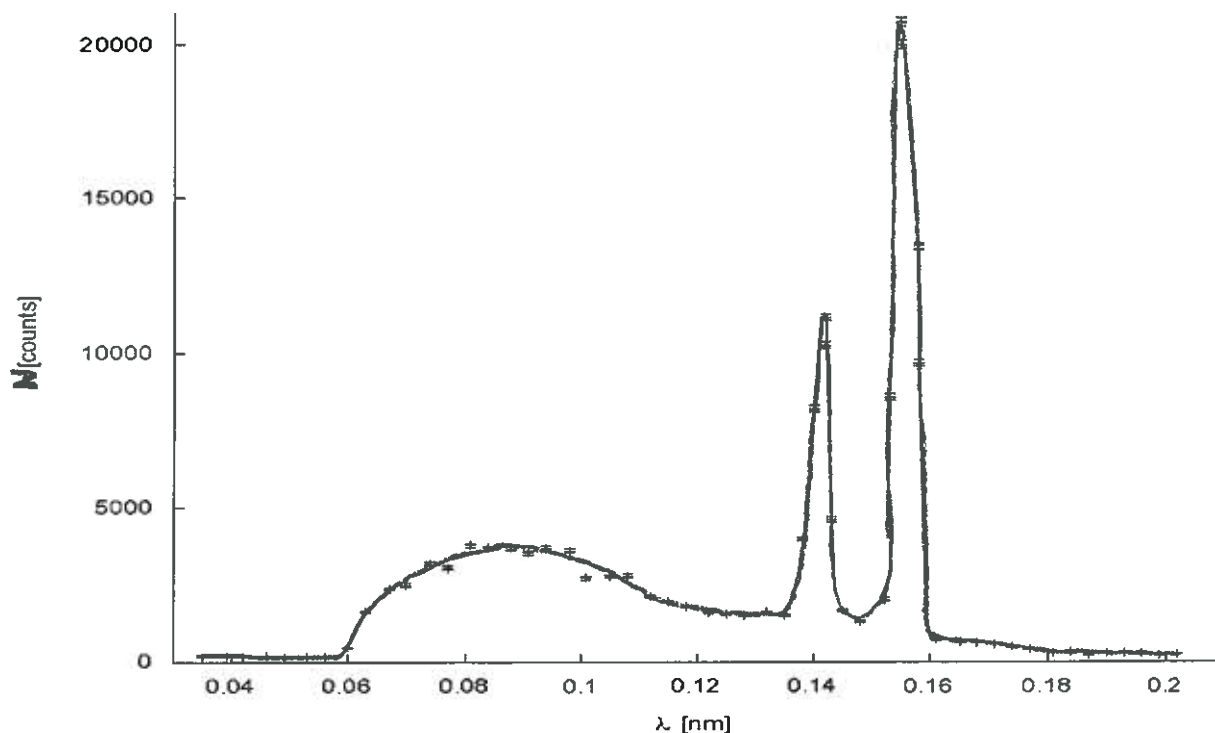
2.3 Měření spektra rentgenu

Měnili jsme úhel Θ od 5° do 30° úhel α jsme vždy nastavili 2x větší. Spektrum jsme měřili jen jednou peaky jsme proměřili několikrát, předpokládáme zde také Poissonovo rozdělení, y-chyby ale neuvádíme, jelikož je to pro nás zbytečný údaj. Naměřené hodnoty jsou zapsány v *tabulce č.2*. Chybu vlnové délky uvádíme až ve výsledku.

Tabulka č.2: Spojité spektrum

$\Theta [^\circ]$	λ [nm]	N [counts]	$\Theta [^\circ]$	λ [nm]	N [counts]	$\Theta [^\circ]$	λ [nm]	N [counts]
5	0,035	174	14,5	0,101	2715	22,25	0,153	8566
5,5	0,039	210	15	0,105	2775	22,5	0,155	19950
6	0,042	160	15,5	0,108	2785	22,5	0,155	20686
6,5	0,046	186	16	0,112	2104	22,75	0,156	23380
7	0,049	168	16,5	0,115	1958	23	0,158	13411
7,5	0,053	170	17	0,118	1794	23	0,158	9654
8	0,056	170	17,5	0,122	1573	23,5	0,161	716
8,5	0,060	480	18	0,125	1544	24	0,165	638
9	0,063	1621	18,5	0,128	1499	24,5	0,168	626
9,5	0,067	2367	19	0,132	1608	25	0,171	580
10	0,070	2498	19,5	0,135	1505	25,5	0,174	478
10,5	0,074	3183	20	0,138	3951	26	0,177	412
11	0,077	3021	20,25	0,140	8200	26,5	0,181	301
11,5	0,081	3779	20,5	0,142	10232	27	0,184	330
12	0,084	3700	20,5	0,142	11124	27,5	0,187	216
12,5	0,088	3694	20,75	0,143	4600	28	0,190	300
13	0,091	3526	21	0,145	1654	28,5	0,193	302
13,5	0,094	3670	21,5	0,148	1318	29	0,196	305
14	0,098	3593	22	0,152	2014	29,5	0,199	212
						30	0,202	244

Graf č.3: Spojité spektrum



Mezní energii jsme určili pro vlnovou délku

$$\lambda_m = (0,058 \pm 0,002) \text{ nm}$$

z této hodnoty spočítáme Planckovu konstantu dle vzorce (3). Náboj elektronu je $e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ [3], rychlost světla $c = 299792 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ [3] a napětí bylo $U = (20,0 \pm 1,3) \text{ keV}$. Planckova konstanta je tedy

$$h = (6,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Charakteristické spektrální čáry jsme určili takto:

$$\lambda_\alpha = (0,156 \pm 0,004) \text{ nm}$$

$$\lambda_\beta = (0,142 \pm 0,004) \text{ nm}$$

Z toho vyplývají vlnočty dle vztahu (4)

$$v_\alpha = (6,4 \pm 0,2) \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$v_\beta = (7,0 \pm 0,2) \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Dle vztahu (5) spočítáme energie těchto fotonů. Použijí tabelovanou Planckovu konstantu $h = 6,62617 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ [3].

$$E_\beta = (7,9 \pm 0,2) \text{ keV}$$

$$E_\alpha = (8,7 \pm 0,2) \text{ keV}$$

Dle vzorce (6) určíme stínící konstanty. Rydbergova konstanta je $R = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ [3]. Atomové číslo je $Z = 29$ [3].

$$s_\alpha = (1,09 \pm 0,03)$$

$$s_\beta = (2,13 \pm 0,6)$$

3 Diskuse

3.1 Planckova konstanta

Nám vyšla planckova konstanta $h = (6,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, což se shoduje s tabelovanou hodnotou $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. I když se tato hodnota shoduje, je logické, že jsme naměřili o trochu nižší hodnotu, než je skutečná Planckova konstanta, jelikož pravděpodobnost vyražení fotonu s energií celého elektronu se limitně blíží nule a to velmi strmě.

Největší chybu do měření Planckovy konstanty zaneslo měření proudu na ampérmetru a to celých 6,5%. Chyba, kterou zaneslo do měření měření úhlu byla 3,4%

3.2 Charakteristické spektrum

Čáry charakteristického spektra nám vyšly $\lambda_\alpha = (0,156 \pm 0,004) \text{ nm}$, $\lambda_\beta = (0,142 \pm 0,004) \text{ nm}$, což se shoduje s tabelovanými hodnotami $\lambda_\alpha = 0,1541 \text{ nm}$ a $\lambda_\beta = 0,1392 \text{ nm}$. Největší chybu do určování vlnových délek zaneslo měření úhlu cca. 2,5%.

3.3 Pevné natočení krystalů

Naše výsledné maximum bylo na hodnotě $\alpha_{max} = (26,66 \pm 0,50)^\circ$, tato hodnota má analogii se zákonem odrazu a kryje se v rámci chyby s teoretickou hodnotou $(28 \pm 1)^\circ$. Hodnota 26,66 nespadá do chyby teoretické hodnoty. Toto odchýlení je nejspíše způsobeno nepřesnou úhlovou stupnicí. Dále je možné, že zrovna na tomto úhlu se projevila nějaká vada v krystalové mřížce LiF.

3.4 Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení testuji v *tabulce č.1* a v *grafu č.2*. Vidíme jistou korelaci mezi námi naměřenými chybami a chybami spočítanými dle rozdělení. Nesrovnalosti přisuzujeme šumu, který výrazně ovlivňoval chybu měření při malých intenzitách.

3.5 Návrh přesnějšího uspořádání pokusu

Toto měření bylo přesné (pod 3%) až na měření Planckovy konstanty s chybou 8%. Přesnější výsledek Planckovy konstanty bychom dostali výměnou ampérmetru za nějaký přesnější a zkalibrováním úhlové stupnice pomocí zákona odrazu a rozdělením stupnice na více dílků. Myslíme si, že bychom se takto dostali na chybu pod 1%.

4 Závěr

Ze zadané hustoty krystalu fluoridu lithného jsme určili vzdálenost hlavních atomových rovin $d = 0,2023 \text{ nm}$.

Proměřili jsme úhlovou závislost intenzity difraktovaného rentgenového záření při pevné orientaci krystalu. Výsledky jsou zapsány v *tabulce č.1* a zobrazeny v *grafu č.1*.

Proměřili jsme spektrum rentgenového záření při konstantním anodovém napětí rentgenky $U_a = 20 \text{ kV}$, výsledky jsou v *tabulce č.2* a jsou zobrazeny v *grafu č.3*.

Z mezní hodnoty energie spojitého spektra jsme určili Planckovu konstantu $h = (6,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ a porovnali s tabelovanou hodnotou v odstavci 3.1. Určili jsme vlnové délky čar $K_\alpha \lambda_\alpha = (0,156 \pm 0,004) \text{ nm}$, $K_\beta \lambda_\beta = (0,142 \pm 0,004) \text{ nm}$ a porovnali je s tabelovanými hodnotami v odstavci 3.2, spočítali jsme jejich vlnočty $\nu_\alpha = (6,4 \pm 0,2) \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$, $\nu_\beta = (7,0 \pm 0,2) \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$ a odpovídající energetické rozdíly jsme vyjádřili v keV $E_\beta = (7,9 \pm 0,2) \text{ keV}$, $E_\alpha = (8,7 \pm 0,2) \text{ keV}$. Určili jsme konstanty stínění $s_\alpha = (1,09 \pm 0,03)$, $s_\beta = (2,13 \pm 0,6)$.

5 Literatura

- [1] <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/>, Studijní texty k Fyzikálnímu praktiku
- [2] Brož, J. a kol., *Základy fyzikálních měření I*, SPN, Praha 1983
- [3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: *Fyzikální a matematické tabulky*, SNTL, Praha, 1980

uhel	1	2	3
10	134	136	138
12	102	114	134
14	94	96	82
16	96	116	104
18	62	84	92
20	82	110	68
22	120	92	108
24	124	142	140
24,5	196	174	172
25	428	421	426
25,5	1873	2021	1997
26	5113	4994	5194
26,5	5903	5748	5937
26,66	6188	6173	5867
27	5488	5418	5524
27,5	4653	4547	4610
28	3071	2921	3114
28,5	1447	1452	1386
29	728	749	778
29,5	348	352	338
30	166	172	198
32	100	96	78
34	86	88	62
36	78	68	60
38	64	64	90
40	60	94	64
42	98	80	72
44	60	52	66
46	68	58	92
48	68	58	64
50	38	56	70

J.broz V.roskovec M.Valouch
Fyzikalni a matematicke tabulky
SNTL 1980

alfa1
0,154056

alfa2
0,154439

beta1
0,139222

proud
0,2mA 1,5% +0,01

natoceni 14stupnu +-0,5

zohlednit poissonovo rozdeleni

uhel teta		
5	174	140
5,5	210	186
6	160	148
6,5	186	158
7	168	140
7,5	170	186
8	170	168
8,5	480	474
9	1621	1743
9,5	2367	2482
10	2498	2599
10,5	3183	3269
11	3021	3082
11,5	3779	3717
12	3700	3798
12,5	3694	3655
13	3526	3559
13,5	3670	3651
14	3593	3515
14,5	2715	2822
15	2775	2891
15,5	2785	2637
16	2104	
16,5	1958	
17	1794	
17,5	1573	
18	1544	
18,5	1499	
19	1608	
19,5	1505	
20	3951	
20,5	11124	
21	1654	
21,5	1318	
22	2014	
22,5	20686	
23	9654	
23,5	716	
24	638	
24,5	626	
25	580	
25,5	478	
26	412	
26,5	301	
27	330	
27,5	216	
28	300	
28,5	302	
29	305	
29,5	212	
30	244	
20,25	8200	
20,5	10232	
20,75	4600	
22,25	8566	
22,5	19950	
22,75	23380	
23	13411	

34
18
20

VIRI'
KRATOCAVIC

5 bodu
7.4.2011
Nina